

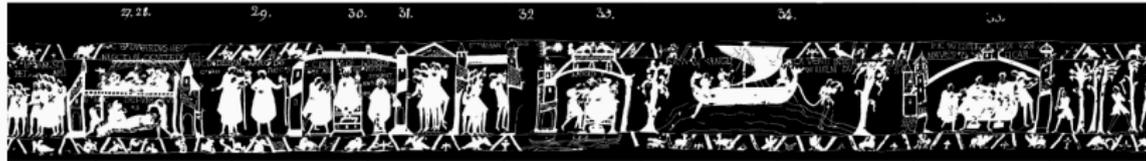
Autour des équations d'Hamilton-Jacobi

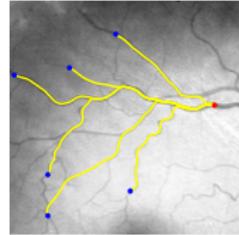
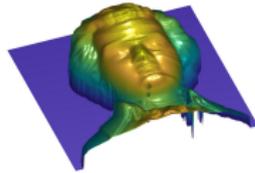
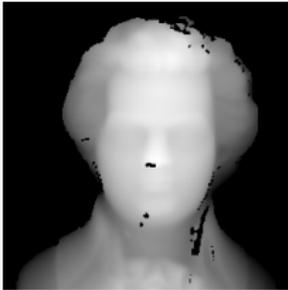
Hamza Ennaji

LJK

Journées ANR StableProxies







Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné régulier, $H : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ un Hamiltonien continue vérifiant:

(H1) $\{p, H(x, p) \leq 0\} := Z(x)$ est convexe pour tout $x \in \Omega$,

(H2) $Z(x)$ est compact,

(H3) $H(x, 0) \leq 0$.

On considère

$$H(x, \nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Cadre théorique

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un domaine borné régulier, $H : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ un Hamiltonien continue vérifiant:

(H1) $\{p, H(x, p) \leq 0\} := Z(x)$ est convexe pour tout $x \in \Omega$,

(H2) $Z(x)$ est compact,

(H3) $H(x, 0) \leq 0$.

On considère

$$H(x, \nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Exemple: équation Eikonale

$$\begin{cases} |\partial_x u| = 1, & x \in (-1, 1) \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon \partial_{xx} u + |\partial_x u| = 1, & x \in (-1, 1), \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\varepsilon \partial_{xx} u + |\partial_x u| = 1, & x \in (-1, 1), \\ u(-1) = u(1) = 0. \end{cases}$$

→ Notion de solutions de viscosité: Crandall et Lions \sim 1980.

- u est une sous-solution de viscosité si: pour tout $\phi \in C^1(\Omega)$ t.q $u - \phi$ atteint un maximum local en x , alors $H(x, \nabla \phi(x)) \leq 0$.
- u est une sur-solution de viscosité si: pour tout $\phi \in C^1(\Omega)$ s.t $u - \phi$ atteint un minimum local en x , alors $H(x, \nabla \phi(x)) \geq 0$.
- u est une solution de viscosité si elle est à la fois sur et sous-solution.

Le caractère métrique des équations d'HJ

On définit la fonction d'appui de $Z(x)$

$$\sigma_{Z(x)}(x, p) = \sup\{\langle p, q \rangle, q \in Z(x)\}.$$

Le caractère métrique des équations d'HJ

On définit la fonction d'appui de $Z(x)$

$$\sigma_{Z(x)}(x, p) = \sup\{\langle p, q \rangle, q \in Z(x)\}.$$

σ est une métrique Finslérienne:

- $\sigma(x, \cdot)$ est 1-homogène pour tout $x \in \overline{\Omega}$
- $\sigma(x, \cdot)$ est convexe.

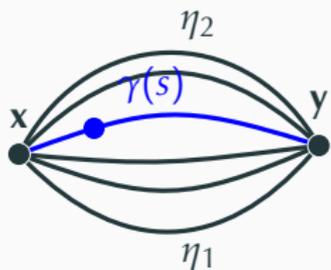
Le caractère métrique des équations d'HJ

On définit la fonction d'appui de $Z(x)$

$$\sigma_{Z(x)}(x, p) = \sup\{\langle p, q \rangle, q \in Z(x)\}.$$

σ est une métrique Finslérienne:

- $\sigma(x, \cdot)$ est 1-homogène pour tout $x \in \bar{\Omega}$
- $\sigma(x, \cdot)$ est convexe.
- σ induit une distance géodésique d_σ



$$d_\sigma(x, y) = \inf_{\gamma \in \Gamma(x, y)} \int_0^1 \sigma(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

avec $\Gamma(x, y) =$

$$\{\gamma \in \text{Lip}([0, 1], \bar{\Omega}) : \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}.$$

Le caractère métrique des équations d'HJ

Quelques propriétés de d_σ

- d_σ est une quasi-distance: pour tout $x, y \in \bar{\Omega}$ $d_\sigma(x, y) \geq 0$ et $d_\sigma(x, x) = 0$.
En plus, pour tout $x, y, z \in \bar{\Omega}$ one has $d_\sigma(x, y) \leq d_\sigma(x, z) + d_\sigma(z, y)$.
- Condition de compatibilité:

$$v \in \mathcal{S}_H^-(\Omega) \text{ ssi } v(x) - v(y) \leq d_\sigma(y, x) \text{ pour tout } x, y \in \bar{\Omega}.$$

- Peut dégénérer

Le caractère métrique des équations d'HJ

Quelques propriétés de d_σ

- d_σ est une quasi-distance: pour tout $x, y \in \overline{\Omega}$ $d_\sigma(x, y) \geq 0$ et $d_\sigma(x, x) = 0$.
En plus, pour tout $x, y, z \in \overline{\Omega}$ one has $d_\sigma(x, y) \leq d_\sigma(x, z) + d_\sigma(z, y)$.
- Condition de compatibilité:

$$v \in \mathcal{S}_H^-(\Omega) \text{ ssi } v(x) - v(y) \leq d_\sigma(y, x) \text{ pour tout } x, y \in \overline{\Omega}.$$

- Peut dégénérer \rightsquigarrow Ensemble d'Aubry

Vers une formulation variationnelle

On considère $C \subset \bar{\Omega}$ (e.g., $C = \partial\Omega$ ou $C = \{x\}$ pour $x \in \bar{\Omega}$), et l'équation

$$\begin{cases} H(x, \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus C \\ u = g & \text{sur } C \end{cases} \quad (0.1)$$

avec $g: C \rightarrow \mathbb{R}$ is est fonction continue vérifiant la condition de compatibilité

$$g(x) - g(y) \leq d_\sigma(y, x) \text{ sur } C.$$

Vers une formulation variationnelle

On considère $C \subset \bar{\Omega}$ (e.g., $C = \partial\Omega$ ou $C = \{x\}$ pour $x \in \bar{\Omega}$), et l'équation

$$\begin{cases} H(x, \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus C \\ u = g & \text{sur } C \end{cases}$$

avec $g: C \rightarrow \mathbb{R}$ is est fonction continue vérifiant la condition de compatibilité

$$g(x) - g(y) \leq d_\sigma(y, x) \text{ sur } C.$$

Alors, la sous-solution maximal of (0.1) est donnée par

$$u(x) = \min_{y \in C} d_\sigma(y, x) + g(y).$$

Vers une formulation variationnelle

On considère $C \subset \bar{\Omega}$ (e.g., $C = \partial\Omega$ ou $C = \{x\}$ pour $x \in \bar{\Omega}$), et l'équation

$$\begin{cases} H(x, \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \setminus C \\ u = g & \text{sur } C \end{cases}$$

avec $g: C \rightarrow \mathbb{R}$ is est fonction continue vérifiant la condition de compatibilité

$$g(x) - g(y) \leq d_\sigma(y, x) \text{ sur } C.$$

Alors, la sous-solution maximal of (0.1) est donnée par

$$u(x) = \min_{y \in C} d_\sigma(y, x) + g(y).$$

↪Q: Comment calculer u de façon efficace pour un H général ?

Caractérisation des sous-solutions

$$\mathcal{S}_H^-(\Omega) = \{u \in W^{1,\infty}(\Omega) \text{ and } \sigma^\circ(x, \nabla u(x)) \leq 1 \text{ for a.e } x \in \Omega\} := \mathcal{B}_{\sigma^\circ}.$$

avec

$$\sigma^\circ(x, p) := \sup_q \{\langle p, q \rangle : \sigma(x, q) \leq 1\},$$

Caractérisation des sous-solutions

$$\mathcal{S}_H^-(\Omega) = \{u \in W^{1,\infty}(\Omega) \text{ and } \sigma^\circ(x, \nabla u(x)) \leq 1 \text{ for a.e } x \in \Omega\} := \mathcal{B}_{\sigma^\circ}.$$

avec

$$\sigma^\circ(x, p) := \sup_q \{\langle p, q \rangle : \sigma(x, q) \leq 1\},$$

Théorème (EIN 2021)

La sous-solution maximal $u(x) = \min_{y \in C} d_\sigma(y, x) + g(y)$ de (0.1), est l'unique solution de

$$\max_{u \in W^{1,\infty}(\Omega)} \left\{ \int_\Omega z(x) dx, \sigma^\circ(x, \nabla z(x)) \leq 1 \text{ and } z = g \text{ on } C \right\}.$$

Vers une formulation variationnelle

Théorème (EIN 2021)

La sous-solution maximal $u(x) = \min_{y \in C} d_\sigma(y, x) + g(y)$ de (0.1), est l'unique solution de

$$\max_{u \in W^{1,\infty}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} z(x) dx, \sigma^\circ(x, \nabla z(x)) \leq 1 \text{ and } z = g \text{ on } C \right\}.$$

Formulation avantageuse

Ce problème s'écrit sous la forme

$$(P) : \inf_u \mathcal{F}(u) + \mathcal{G}(\Lambda u), \text{ avec}$$

$$\mathcal{F}(u) = \begin{cases} - \int_{\Omega} u \, dx & \text{si } u \in g + W_{0,C}^{1,\infty}(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}, \quad \mathcal{G}(\eta) = \mathbb{I}_{B_{\sigma^\circ}}.$$

Théorème (EIN, 2021)

Soit $\rho \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$, alors

$$\max_{u \in W^{1,\infty}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} u d\rho : \nabla u(x) \in \mathcal{B}_{\sigma^\circ} \text{ et } u = g \text{ sur } \partial\Omega \right\} =$$

$$\inf_{\phi \in \mathcal{DM}^p(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} \sigma(x, \phi(x)) dx - \langle \phi \cdot \nu_{\partial\Omega}, g \rangle : -\operatorname{div}(\phi) = \rho \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \right\}.$$

Théorème (EIN, 2021)

Soit $\rho \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$, alors

$$\max_{u \in W^{1,\infty}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} u d\rho : \nabla u(x) \in \mathcal{B}_{\sigma^\circ} \text{ et } u = g \text{ sur } \partial\Omega \right\} =$$

$$\inf_{\phi \in \mathcal{DM}^p(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} \sigma(x, \phi(x)) dx - \langle \phi \cdot \nu_{\partial\Omega}, g \rangle : -\operatorname{div}(\phi) = \rho \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \right\}.$$

avec

$$\mathcal{DM}^p(\Omega) := \left\{ F \in L^p(\Omega)^N : \operatorname{div} F =: \mu \in \mathcal{M}_b(\Omega) \right\}.$$

Théorème (EIN, 2021)

Soit $\rho \in \mathcal{M}_b^+(\Omega)$, alors

$$\max_{u \in W^{1,\infty}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} u d\rho : \nabla u(x) \in \mathcal{B}_{\sigma^0} \text{ et } u = g \text{ sur } \partial\Omega \right\} =$$
$$\inf_{\phi \in \mathcal{DM}^p(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} \sigma(x, \phi(x)) dx - \langle \phi \cdot \nu_{\partial\Omega}, g \rangle : -\operatorname{div}(\phi) = \rho \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \right\}.$$

avec

$$\mathcal{DM}^p(\Omega) := \left\{ F \in L^p(\Omega)^N : \operatorname{div} F =: \mu \in \mathcal{M}_b(\Omega) \right\}.$$

- On définit, pour $h \in \mathcal{M}_b(\overline{\Omega})$ la fonctionnelle $F(h) =$

$$\inf_{\phi} \left\{ \int_{\Omega} \sigma(x, \phi(x)) dx + \int_{\partial\Omega} g dh - \langle \phi \cdot \nu_{\partial\Omega}, g \rangle : -\operatorname{div}(\phi) = \rho + h \mathcal{D}'(\overline{\Omega}) \right\},$$

- On montre que F est convexe, l.s.c and conclure avec $F^{**} = F$.

Approximation

- Discrétiser $\Omega = [0, 1]^2$ en une grille régulière.
- Définir les opérateurs discrets ∇_h et div_h via des différences finies.
- La version discrète de

$$\max_{u \in W^{1,\infty}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} u dx : \sigma^\circ(x, \nabla u(x)) \leq 1, u = g \text{ sur } \partial\Omega \right\}$$

s'écrit alors:

$$\min_{\substack{u \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ u_{i,j} = g_{i,j} \quad \forall (i,j) \in C_d}} \left\{ -h^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{i,j} + \mathbb{I}_{B_{\sigma^\circ}}(\nabla_h u) \right\}$$

- Le dual s'écrit

$$\min_{\substack{\phi \in Y \\ (-\text{div}_h \phi)_{i,j} = 1 \text{ for } (i,j) \notin C_d}} h^2 \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sigma((ih, jh), \phi_{i,j}) + \sum_{(i,j) \in C_d} g_{i,j} ((\text{div}_h \phi)_{i,j} + 1) \right\}.$$

Approximation

- Formulation inf-sup:

$$\inf_{u \in X} \sup_{\phi \in Y} \mathcal{F}_h(u) + \langle \phi, \nabla_h u \rangle - \mathcal{G}_h^*(\phi),$$

avec

$$\mathcal{F}_h(u) = \begin{cases} -h^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n u_{i,j} & \text{si } u = g \text{ on } C_d, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{G}_h(v) = \mathbb{I}_{B_{\sigma^0}}.$$

- Résolution avec l'algorithme Chambolle-Pock.
- Calculer un prox:

$$\mathbf{Prox}_{\tau K}(u) = \underset{v}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|u - v\|^2 + \tau K(v), \tau > 0.$$

Algorithm 1 PD iterations

1ère étape. Initialisation: $\eta, \tau > 0, \theta \in [0, 1], u^0$ et $\phi^0 = \nabla_h u^0, \bar{u}^0 = u^0$.

2ème étape. Pour $k \leq \text{Iter}_{\max}$

$$\phi^{k+1} = \phi^k + \eta \nabla_h(\bar{u}^k) - \eta \mathbf{Proj}_{\mathcal{B}^\circ}((\phi^k + \eta \nabla_h(\bar{u}^k)) / \eta);$$

$$u^{k+1} = \mathbf{Prox}_{\tau \mathcal{F}_h}(u^k - \tau \nabla_h^*(\phi^{k+1}));$$

$$\bar{u}^{k+1} = u^{k+1} + \theta(u^{k+1} - u^k).$$

Algorithm 2 PD iterations

1ère étape. Initialisation: $\eta, \tau > 0, \theta \in [0, 1], u^0$ et $\phi^0 = \nabla_h u^0, \bar{u}^0 = u^0$.

2ème étape. Pour $k \leq \text{Iter}_{max}$

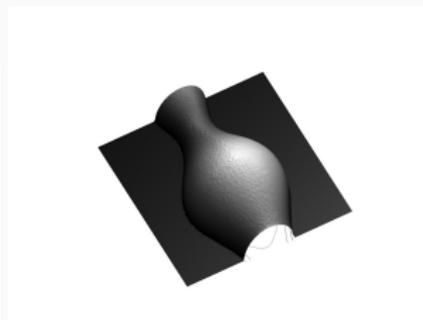
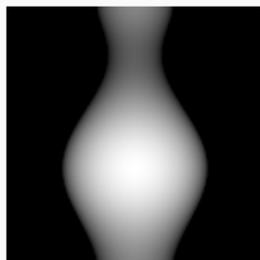
$$\phi^{k+1} = \phi^k + \eta \nabla_h(\bar{u}^k) - \eta \mathbf{Proj}_{\mathcal{B}^\circ}((\phi^k + \eta \nabla_h(\bar{u}^k)) / \eta);$$

$$u^{k+1} = \mathbf{Prox}_{\tau \mathcal{F}_h}(u^k - \tau \nabla_h^*(\phi^{k+1}));$$

$$\bar{u}^{k+1} = u^{k+1} + \theta(u^{k+1} - u^k).$$

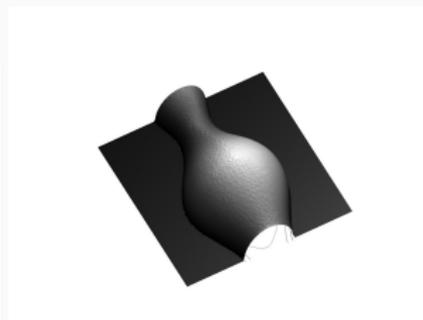
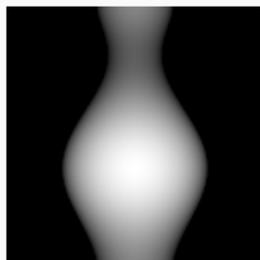
-
- Changement de métriques: $\mathbf{Prox}_K^M(u) = \arg \min_v \frac{1}{2} \|u - v\|_M^2 + K(v)$ avec $M \in \mathcal{S}_{++}^N$.
 - Adaptation: $(\eta, \tau) \rightsquigarrow (\eta_k, \tau_k)$

Illustration: Shape from Shading



$$\mathcal{R}(n(x_1, x_2)) = n(x_1, x_2) \times \ell = I(x_1, x_2)$$

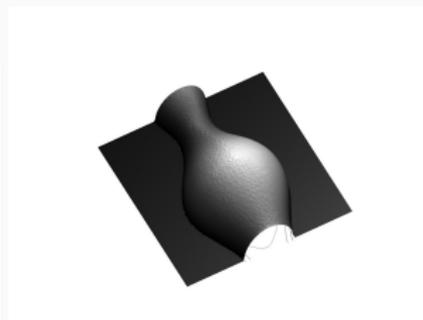
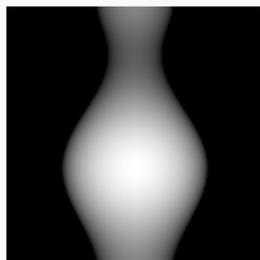
Illustration: Shape from Shading



- Normale à la surface

$$\mathcal{R}(n(x_1, x_2)) = n(x_1, x_2) \times \ell = I(x_1, x_2)$$

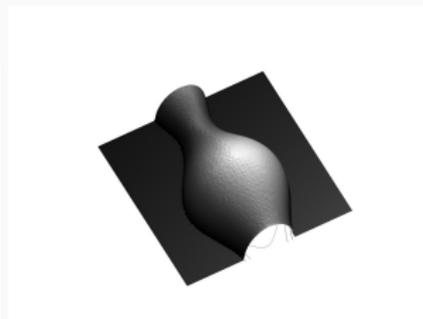
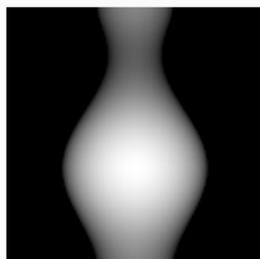
Illustration: Shape from Shading



- Normale à la surface
- Direction de la lumière

$$\mathcal{R}(n(x_1, x_2)) = n(x_1, x_2) \times \ell = I(x_1, x_2)$$

Illustration: Shape from Shading



- Normale à la surface
- Direction de la lumière
- Brillance de l'image

$$\mathcal{R}(n(x_1, x_2)) = n(x_1, x_2) \times \ell = I(x_1, x_2)$$

- $I\sqrt{1 + |\nabla u|^2} + \nabla u \cdot w - r = 0$, avec $\ell = (w, r) = (w_1, w_2, r) \in \mathbb{R}^3$.

Exemple typique

Direction de lumière verticale: $\ell = (0, 0, 1)$

- Le problème se réduit à la résolution d'une équation Eikonale:

$$\begin{cases} |\nabla u| = k \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $k(x) = \sqrt{I^{-2}(x) - 1}$.

Exemple typique

Direction de lumière verticale: $\ell = (0, 0, 1)$

- Le problème se réduit à la résolution d'une équation Eikonale:

$$\begin{cases} |\nabla u| = k \text{ dans } & \Omega \\ u = 0 \text{ sur } & \partial\Omega \end{cases}$$

avec $k(x) = \sqrt{I^{-2}(x) - 1}$.

- $\sigma(x, p) = k(x)|p|$.

Exemple typique

Direction de lumière verticale: $\ell = (0, 0, 1)$

- Le problème se réduit à la résolution d'une équation Eikonale:

$$\begin{cases} |\nabla u| = k \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $k(x) = \sqrt{I^{-2}(x) - 1}$.

- $\sigma(x, p) = k(x)|p|$.
- L'ensemble de dégénérescence $\mathcal{A} := [k = 0]$ correspond aux points d'intensité maximale: $I(x) = 1$.

Exemple typique

Direction de lumière verticale: $\ell = (0, 0, 1)$

- Le problème se réduit à la résolution d'une équation Eikonale:

$$\begin{cases} |\nabla u| = k \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

avec $k(x) = \sqrt{I^{-2}(x) - 1}$.

- $\sigma(x, p) = k(x)|p|$.
- L'ensemble de dégénérescence $\mathcal{A} := [k = 0]$ correspond aux points d'intensité maximale: $I(x) = 1$.
- Dualité:

$$\begin{aligned} & \max_{u \in W^{1,\infty}(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} u dx : |\nabla u| \leq k, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\} \\ &= \min_{\phi \in \mathcal{M}_b(\Omega)^d} \left\{ \int_{\Omega} k(x) d|\phi| : -\operatorname{div}(\phi) = 1 \text{ D}'(\Omega) \right\}. \end{aligned}$$

Distances Finslériennes

Soit $F : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$ une métrique Finslérienne et on considère:

$$\begin{cases} F^\circ(x, \nabla u) = 1 \text{ dans } \Omega \setminus C, \\ u = 0 \text{ sur } C. \end{cases}$$

Distances Finslériennes

Soit $F : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$ une métrique Finslérienne et on considère:

$$\begin{cases} F^\circ(x, \nabla u) = 1 \text{ dans } \Omega \setminus C, \\ u = 0 \text{ sur } C. \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow D(x) = \min_{y \in C} \{d_F(y, x) + g(y)\}.$$

Distances Finslériennes

Soit $F : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^+$ une métrique Finslérienne et on considère:

$$\begin{cases} F^\circ(x, \nabla u) = 1 \text{ dans } \Omega \setminus C, \\ u = 0 \text{ sur } C. \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow D(x) = \min_{y \in C} \{d_F(y, x) + g(y)\}.$$

Examples

- Métrique Euclidienne: $F(x, p) = \|p\|$.
- Métrique Riemannienne: $F(x, p) = k(x)\|p\|$ avec $k > 0$.
- Métrique cristalline : $F(x, p) = \max_{i=1, \dots, m} \langle p, s_i \rangle$ for given directions s_i .
- Métriques de Randers : $F(x, p) = \langle Ap, p \rangle^{1/2} + \langle b(x), p \rangle$, where $A \in \mathcal{S}_{++}^N$ and $b \in \mathbb{R}^N$ such that $\|b\|_{A^{-1}} < 1$.

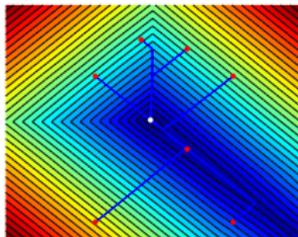
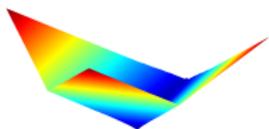
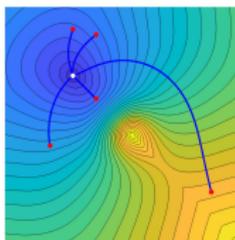
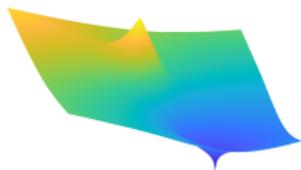
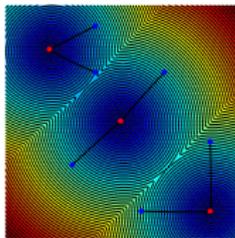
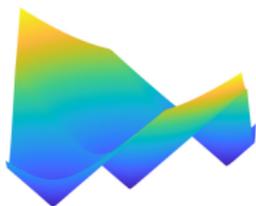
Examples

- Métrique Euclidienne: $F(x, p) = \|p\|$.
- Métrique Riemannienne: $F(x, p) = k(x)\|p\|$ avec $k > 0$.
- Métrique cristalline : $F(x, p) = \max_{i=1, \dots, m} \langle p, s_i \rangle$ for given directions s_i .
- Métriques de Randers : $F(x, p) = \langle Ap, p \rangle^{1/2} + \langle b(x), p \rangle$, where $A \in \mathcal{S}_{++}^N$ and $b \in \mathbb{R}^N$ such that $\|b\|_{A^{-1}} < 1$.



Exemples de boules B_{σ° .

Examples



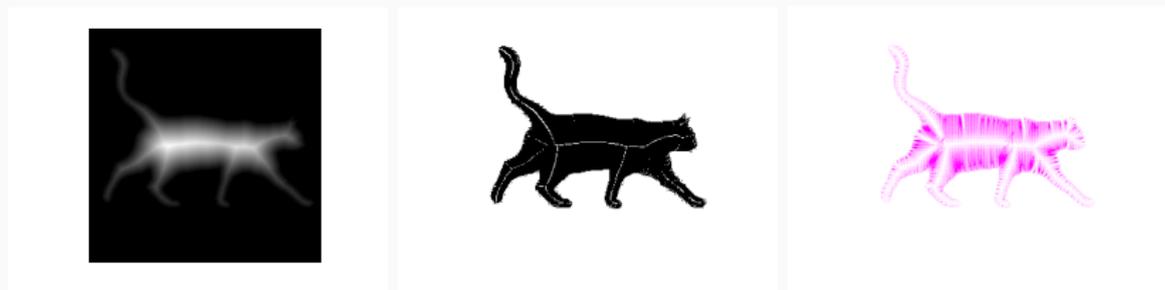


Figure 5: distance au bord, axe médian, flux optimal ϕ .

- Cadre vectoriel: $Du \in \mathcal{O}(n)$.
- Adaptation sur graphes.
- HJ avec obstacles.

Merci pour votre attention !