# Optimisation sous contraintes avec le lagrangien

Agathe Herrou

June 7, 2021

# Table of contents

# Optimisation sous contraintes

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^c$ deux fonctions $\mathcal{C}^1$.
On cherche:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ t.q. } g(x) = 0 \tag{1}$$

# Table of contents

# Formulation

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^1$.
On cherche:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ t.q. } g(x) = 0 \tag{2}$$

# Formulation

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^1$.
On cherche:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ t.q. } g(x) = 0 \tag{2}$$

Introduction du lagrangien:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$$

# Formulation

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deux fonctions $\mathcal{C}^1$.
On cherche:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ t.q. } g(x) = 0 \tag{2}$$

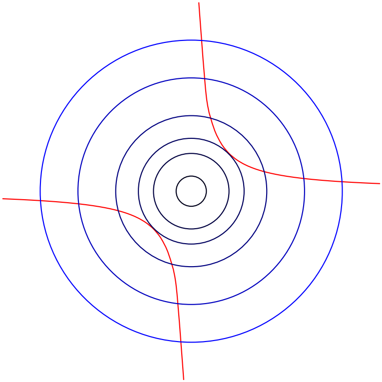
Introduction du lagrangien:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x)$$

Pour résoudre 2, il faut trouver un point où $\nabla \mathcal{L}$ s'annule.

# Illustration

$f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = xy - 1$



# Analyse

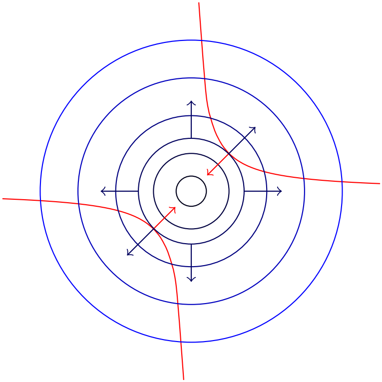
$$\nabla_{x,\lambda}\mathcal{L}(x,\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_x f(x) + \lambda \nabla_x g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

À l'optimum contraint:

- $\nabla f$ et $\nabla g$ sont colinéaires
- La contrainte de $g$ est respectée

# Illustration (2)

$f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = xy - 1$



# Démonstration

Soit $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une courbe $\mathcal{C}^1$ incluse dans la contrainte, telle que $P = \gamma(0)$ soit le minimum de $f$ contraint par $g$.
On considère $h = f \circ \gamma$, qui atteint son minimum à 0.

$$h'(t) = \langle \gamma'(t), \nabla f \circ \gamma(t) \rangle$$

Or, $h'(0) = 0$ (minimum): à l'optimum, $\nabla f$ est orthogonal à la contrainte, donc parallèle au gradient de la contrainte.

# Table of contents

# Formulation

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^c$ deux fonctions $\mathcal{C}^1$.
On cherche:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ t.q. } g(x) = 0 \tag{3}$$

# Formulation

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^c$ deux fonctions $\mathcal{C}^1$.
On cherche:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ t.q. } g(x) = 0 \tag{3}$$

Introduction du lagrangien:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{c} \lambda_i \cdot g(x)_i$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^c$

# Formulation

Soient $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^c$ deux fonctions $\mathcal{C}^1$.
On cherche:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ t.q. } g(x) = 0 \tag{3}$$

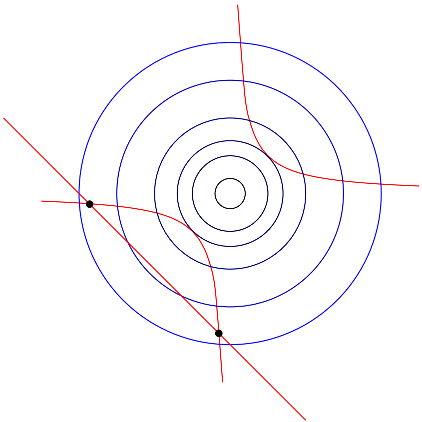
Introduction du lagrangien:

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda \cdot g(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{c} \lambda_i \cdot g(x)_i$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^c$
Pour résoudre 3, il faut trouver un point critique de $\mathcal{L}$

# Illustration

$$f(x, y) = x^2 + y^2,\ g_1(x, y) = xy - 1,\ g_2 = x + y + 2$$



# Analyse

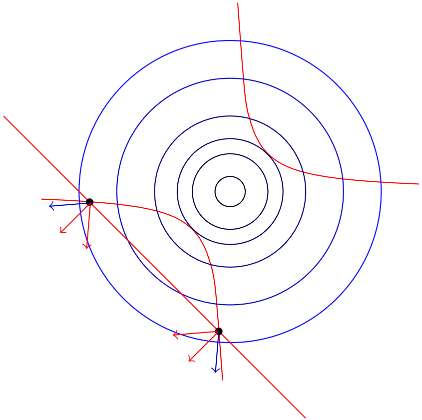
$$\nabla_{x,\lambda}\mathcal{L}(x,\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_x f(x) + \lambda \cdot \nabla_x g(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

À l'optimum contraint:

- $\nabla f$ est une combinaison linéaire des $\nabla g_i$
- La contrainte des $g_i$ est respectée

# Illustration

$f(x, y) = x^2 + y^2$, $g_1(x, y) = xy - 1$, $g_2 = x + y + 2$



# Table of contents

# Cas particulier

Retour sur le premier exemple:

$$\min_{x,y} f(x,y) = x^2 + y^2 \text{ sous la contrainte } g(x,y) = xy - 1 = 0$$

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x + \lambda y \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y + \lambda x \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = xy - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 = y^2 = 1 \Rightarrow (x,y) = (1,1) \text{ or } (-1,-1)$$

# Algorithme de Newton

Rechercher un point critique de $\mathcal{L}$

$$\Leftrightarrow$$

rechercher un zéro de $\nabla\mathcal{L}$

# Algorithme de Newton

$$\text{Rechercher un point critique de } \mathcal{L}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\text{rechercher un zéro de } \nabla\mathcal{L}$$

Soit $H$ la hessienne de $\mathcal{L}$ par rapport à $(x, \lambda) = X$

$$H(X_k) \cdot (X_{k+1} - X_k) = -\nabla_{x,\lambda}\mathcal{L}$$

# Conclusion

- Méthode d'optimisation sous contraintes
- Solution du problème contraint $\Rightarrow$ solution du lagrangien, mais pas réciproquement
- Optimum contraint $\neq$ optimum en général
- Recherche des points critiques analytiquement ou numériquement, puis test de leur nature grâce à la Hessienne de $\mathcal{L}$

# Questions?

# Hessian

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(xy - 1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 2x + \lambda y \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 2y + \lambda x \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = xy - 1 \end{cases}$$

$$H_{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} 2 & \lambda & y \\ \lambda & 2 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & \pm 1 \\ -2 & 2 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$