Synthèse de champs de vecteurs

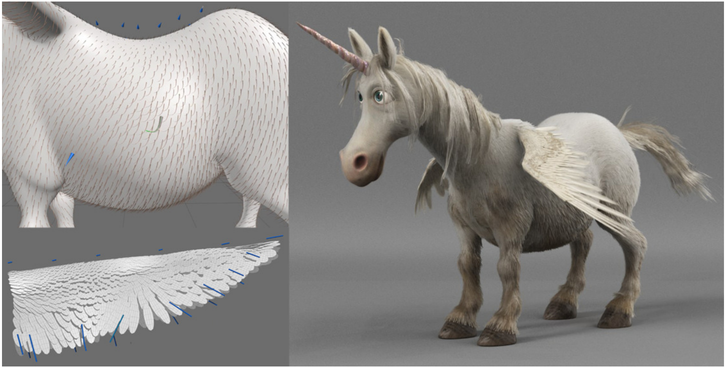
June 15, 2022

Plan

1. Motivation
2. Géométrie différentielle
3. Vector Heat Method
4. Design de connexions

Synthèse de champs de vecteurs

On cherche à construire des champs de vecteurs cohérents à partir de certains vecteurs initiaux.
Application: génération de poils



Articles

[1] Sharp, Nicholas and Soliman, Yousuf and Crane, Keenan (2019) *The Vector Heat Method.*

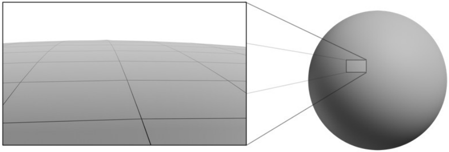
[2] Keenan Crane and Mathieu Desbrun and Peter Schröder (2010) *Trivial Connections on Discrete Surfaces*

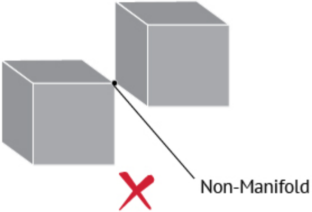
Plan

Variété (manifold)

Intuition

Surface lisse, généralisation de courbe dérivable.



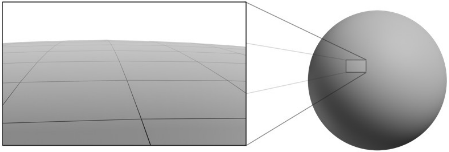


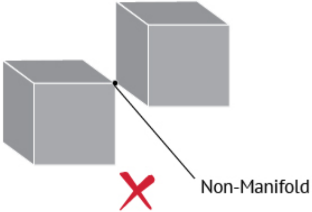
- Pourquoi on veut que ce soit lisse?

Variété (manifold)

Intuition

Surface lisse, généralisation de courbe dérivable.





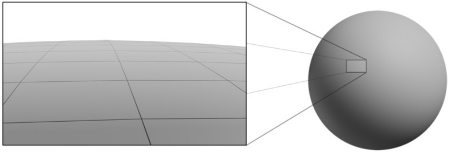
- Pourquoi on veut que ce soit lisse?

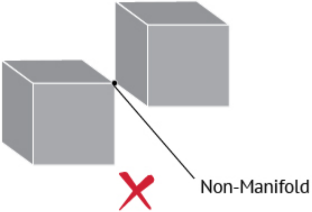
  →Pour pouvoir faire des calculs dessus.

Variété (manifold)

Intuition

Surface lisse, généralisation de courbe dérivable.





- Pourquoi on veut que ce soit lisse?

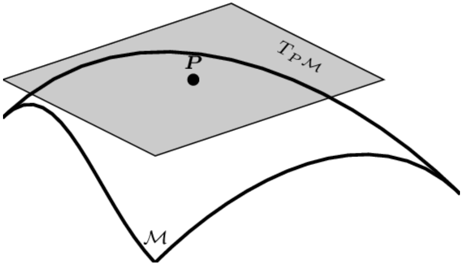
  →Pour pouvoir faire des calculs dessus.

  Par exemple, la différentielle d'une fonction mesure la variation de la fonction dans une direction donnée $\implies$ on doit pouvoir définir la notion de direction (donc de vecteur).

Espace Tangent

Intuition

Meilleure approximation plate de la surface autour d'un point.

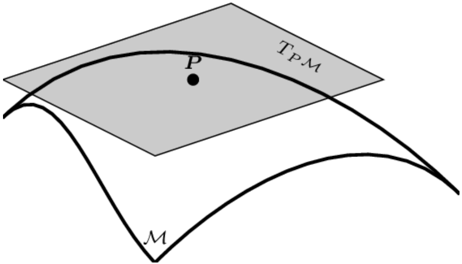


- L'intérêt pour nous:

Espace Tangent

Intuition

Meilleure approximation plate de la surface autour d'un point.

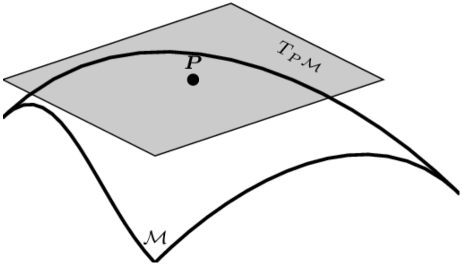


- L'intérêt pour nous:
  →On va définir nos champs de vecteurs dessus

Espace Tangent

Intuition

Meilleure approximation plate de la surface autour d'un point.



- L'intérêt pour nous:
  →On va définir nos champs de vecteurs dessus

⚠Vecteurs intrinsèques, qui dépendent de la position de P sur la variété

Exemple d'opérateur différentiel: le laplacien

Intuition

Le laplacien (Δ) mesure l'écart entre la valeur d'une fonction en un point par rapport à son voisinage. (généralisation de la dérivée seconde)

Pour h petit,

$$f''(x) = (\Delta f)(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

$$\iff h^2 (\Delta f)(x) \approx f(x+h) - f(x) + f(x-h) - f(x)$$

Exemple d'opérateur différentiel: le laplacien

Intuition

Le laplacien (Δ) mesure l'écart entre la valeur d'une fonction en un point par rapport à son voisinage. (généralisation de la dérivée seconde)

Pour h petit,

$$f''(x) = (\Delta f)(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$
$$\iff h^2(\Delta f)(x) \approx f(x+h) - f(x) + f(x-h) - f(x)$$

- Donc le laplacien est proportionnel à la somme des écarts aux voisins.

Exemple d'opérateur différentiel: le laplacien

Intuition

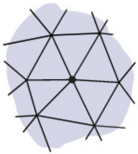
Le laplacien (Δ) mesure l'écart entre la valeur d'une fonction en un point par rapport à son voisinage. (généralisation de la dérivée seconde)

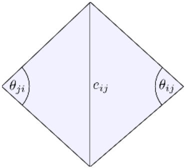
Pour h petit,

$$f''(x) = (\Delta f)(x) \approx \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$
$$\iff h^2(\Delta f)(x) \approx f(x+h) - f(x) + f(x-h) - f(x)$$

- Donc le laplacien est proportionnel à la somme des écarts aux voisins.
  $\implies$ C'est la propriété qu'on veut conserver quand on discrétise.

Plusieurs discrétisations sont possibles(à un facteur près):



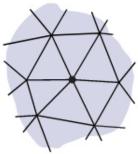


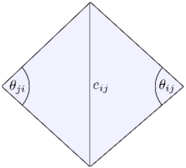
Discrétiser le laplacien sur des maillages courbes

Plusieurs discrétisations sont possibles(à un facteur près):

- Graph-Laplacian:

$$\Delta f(x_i) \approx \sum_{x_j \in \mathcal{N}(x_i)} (f(x_j) - f(x_i))$$



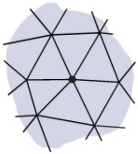


Discrétiser le laplacien sur des maillages courbes

Plusieurs discrétisations sont possibles(à un facteur près):

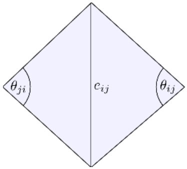
- Graph-Laplacian:

$$\Delta f(x_i) \approx \sum_{x_j \in \mathcal{N}(x_i)} (f(x_j) - f(x_i))$$



- Maillages triangulaires Cotan-Laplacian:

$$\Delta f(x_i) \approx \sum_{x_j \in \mathcal{N}(x_i)} \frac{1}{2}(\cot(\theta_{ij})+\cot(\theta_{ji}))(f(x_j)-f(x_i))$$

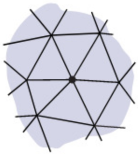


Discrétiser le laplacien sur des maillages courbes

Plusieurs discrétisations sont possibles(à un facteur près):

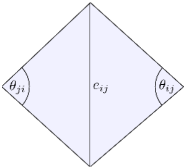
- Graph-Laplacian:

$$\Delta f(x_i) \approx \sum_{x_j \in \mathcal{N}(x_i)} (f(x_j) - f(x_i))$$



- Maillages triangulaires Cotan-Laplacian:

$$\Delta f(x_i) \approx \sum_{x_j \in \mathcal{N}(x_i)} \frac{1}{2}(\cot(\theta_{ij}) + \cot(\theta_{ji}))(f(x_j) - f(x_i))$$



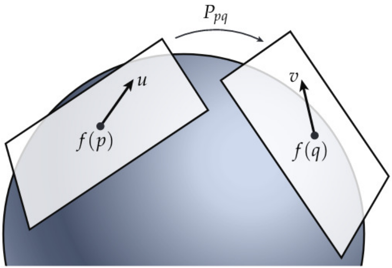
- Maillages polygonaux:

[1] Fernando de Goes, Andrew Butts, Mathieu Desbrun (2020) *Discrete Differential Operators on Polygonal Meshes*.

Le laplacien pour les fonctions vectorielles?

le hic

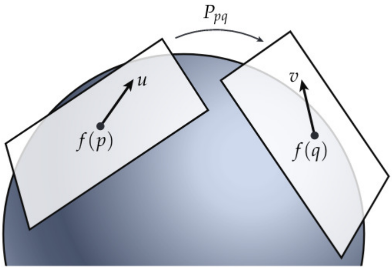
Dans les formules précédentes on prennait les différences des valeurs aux noeuds des maillages (qui étaient scalaires), mais on a plus le droit de le faire pour des vecteurs!



Le laplacien pour les fonctions vectorielles?

le hic

Dans les formules précédentes on prennait les différences des valeurs aux noeuds des maillages (qui étaient scalaires), mais on a plus le droit de le faire pour des vecteurs!

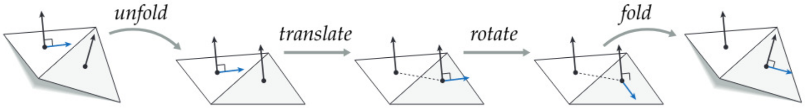


- On a besoin de *connecter* les plans tangents pour pouvoir comparer les vecteurs!.

Connexion et transport parallèle

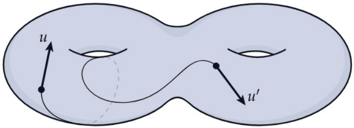
Intuition: Connexion

Une connexion ∇ exprime comment passer d'un plan tangent à un autre localement. En particulier: La connexion de Levi-Civita



Intuition: Transport parallèle

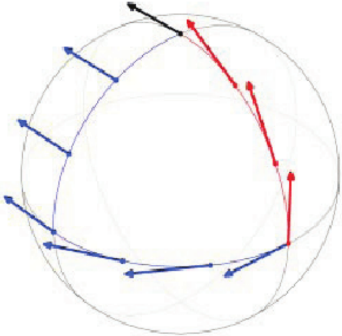
Le transport parallèle c'est le déplacement d'un vecteur le long d'une courbe.



Connexion et transport parallèle

Remarque importante:

A la différence des nombres, déplacer des vecteurs sur une surface les affecte!



Le Connection-Laplacian

Intuition: Connection Laplacian Δ^∇

a le même comportement que le laplacien mais transporte les vecteurs sur le même espace tangent avant de les comparer.

La différence entre un opérateur et sa version "connexion" est très visible dans la discrétisation:

$$\mathbf{G}_f \boldsymbol{\phi}_f = \sum_{v \in f} \mathbf{g}_f^v \, \phi(\mathbf{x}_v)$$

$$\mathbf{G}_f^\nabla \boldsymbol{u}_f = \sum_{v \in f} \left(\mathbf{T}_f^t \mathbf{g}_f^v\right) \left(\boldsymbol{R}_f^v \boldsymbol{u}_v\right)^t$$

Plan

Vector Heat Method

But de l'algorithme

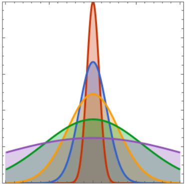
Générer un champ de vecteurs à partir de vecteurs de base.

Principe:

Diffuser les vecteurs avec l'équation de la chaleur pour obtenir une interpolation lisse de ce qu'on aurait obtenu en transportant parallèlement chaque vecteur imposé.

Equation de la chaleur

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \Delta f$$



Intuition:

On peut modéliser par l'équation de la chaleur les phénomènes où à chaque instant la valeur en chaque point se rapproche de la valeur de ses voisins. Phénomènes de moyennages.

Beaucoup de bonnes propriétés:

- Equation très connue et simple: utile pour les preuves
- Très stable numériquement (plus que l'équation des ondes par exemple)
- Très simple à simuler → résolution d'un système linéaire: $(I - dt\Delta^{\nabla})x = b$

Pourquoi ça marche?

Deux cas de figures:

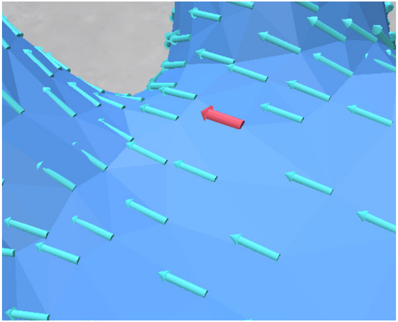


Figure: Une seule source donc juste transport

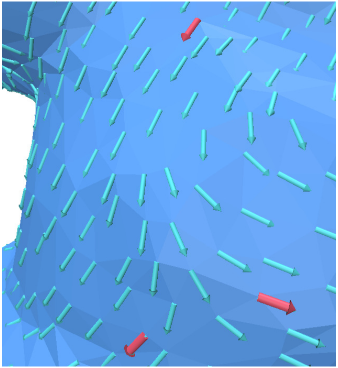
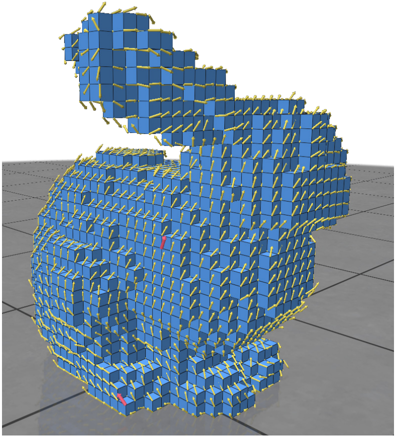


Figure: Plusieurs sources donc interpolation

Vector Heat Method: Recapitulons

Un algorithme:

- simple, rapide et efficace
- out of the box
- élégant

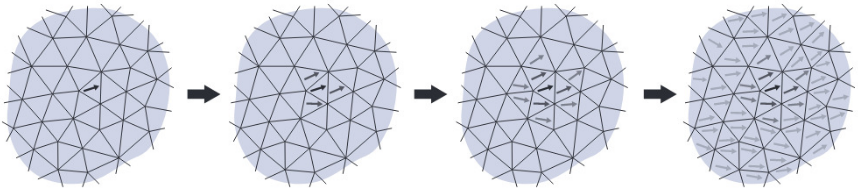


Plan

Autre approche

idée de l'algorithme

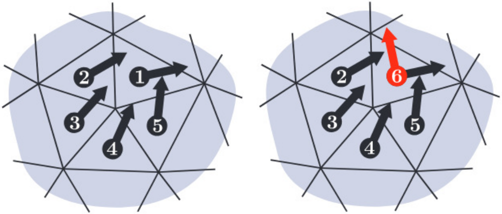
On a vu qu'une connexion permettait de transporter des vecteurs sur une surface, pour générer un champ de vecteur, on pourrait partir d'un vecteur et simplement le transporter partout sur la surface!



Problème: on a vu que la connexion de levi-civita dépendait du chemin emprunté, elle n'est donc pas adaptée.

Holonomie et connexion triviale

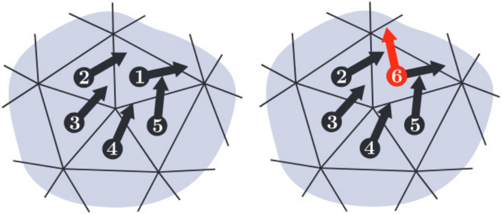
Si on regarde l'effet d'une connexion autour d'une boucle:



Holonomie : différence entre le vecteur avant et après le transport autour d'une boucle

Une connexion sans holonomie est dîte **triviale**.

Si on regarde l'effet d'une connexion autour d'une boucle:



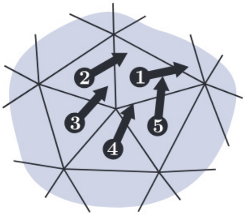
Holonomie : différence entre le vecteur avant et après le transport autour d'une boucle

Une connexion sans holonomie est dîte **triviale**.

- Devinette sympatoche:
  Pourquoi le transport par une connexion triviale est indépendant du chemin choisi?

Holonomie et connexion triviale

Si on regarde l'effet d'une connexion autour d'une boucle:



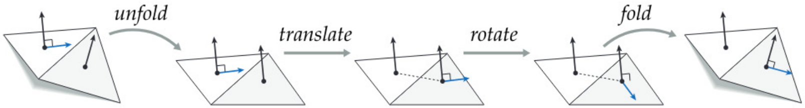
Holonomie : différence entre le vecteur avant et après le transport autour d'une boucle

Une connexion sans holonomie est dîte **triviale**.

- Devinette sympatoche:
  Pourquoi le transport par une connexion triviale est indépendant du chemin choisi?

$$v : A \xrightarrow[1]{v'} B \xrightarrow[2]{v} A \xrightarrow[3]{v'} B$$

Design de connexion

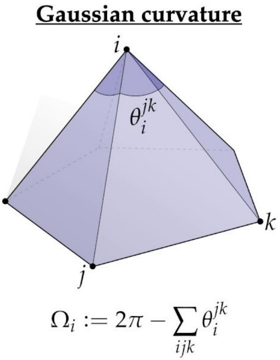


Une connexion est uniquement déterminée par l'angle de la rotation finale.
Si on ne tourne jamais à la fin c'est la connexion de Levi-Civita.

$\Longrightarrow$ pour générer une connexion triviale on doit trouver les angles de rotation de telle sorte qu'ils compensent les variations induites par le transport.

Courbure de Gauss et holonomie

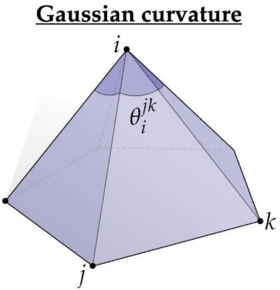
En réalité, la déformation lors du transport par la connection de levi-civita est proportionnelle à la courbure de Gauss.



φ_i = angle de rotation après être transporté au travers de l'arête i.
K_i = la courbure de gauss intégrée autour du sommet i

$$d_0^\star \varphi = -K$$

En réalité, la déformation lors du transport par la connection de levi-civita est proportionnelle à la courbure de Gauss.



$$\Omega_i := 2\pi - \sum_{ijk} \theta_i^{jk}$$

φ_i = angle de rotation après être transporté au travers de l'arête i.
K_i = la courbure de gauss intégrée autour du sommet i

$$\mathrm{d}_0^\star \varphi = -K$$

- Système sous-déterminé, infinité de solution: prenons la plus proche de Levi-Civita. (solution de plus petite norme)

Le plus beau théorème de tous les temps et singularités

Le problème vient du fait que la valeur de la somme de la courbure de Gauss varie selon la topologie (!):

Théorème de Gauss-Bonnet

$$\int_M K \mathrm{d}A = 2\pi\chi(M)$$

où $\chi(M) = 2 - 2g$

Donc pour vraiment annuler l'holonomie il faut respecter gauss-bonnet globalement donc:

$$\mathrm{d}_0^\star \varphi = -K + 2\pi Z$$

où $\sum_i Z_i = \chi(M) \implies$ c'est ce qui nous permet vraiment de designer à la main des champs de vecteurs en spécifiant la location des singularités et leur nature.

Connexions triviales: Recapitulons

- encore moins couteux et également très simple algorithmiquement
- pas la même utilité que VHM
- contrôle hyper fin du champ de vecteurs