Une définition arithmétique du cercle de Bresenham

J.L. Toutant

LIRMM
UMR 5506 CNRS-UMII

Journées “Informatique et Géométrie”
Lyon, juin 2006

JAMET D., FIORIO C. AND TOUTANT J.-L.
Discrete Circle : An Arithmetical Approach with non Constant Thickness.
Vision Geometry XIV, Electronic Imaging 2006, San José(USA), 2006.

Introduction

- Caractérisation arithmétique des droites discrètes :
  - pavage du plan,
  - connexité,
- caractérisation arithmétique des cercles discrets :
  - pavage du plan,
- utilisation d’une épaisseur non constante.

Plan

Adjacence et connexité

Un point de $\mathbb{Z}^2$ est un pixel et un point de $\mathbb{Z}^n$, un voxel.

Definition (0-Adjacence)

Soient $\mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_n)$ et $\mathbf{V'} = (V'_1, \ldots, V'_n)$.
Les voxels $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V'}$ sont 0-voisins ou 0-adjacents si et seulement si :

$$\|\mathbf{V} - \mathbf{V'}\|_\infty = \max\{|V_1 - V'_1|, \ldots, |V_n - V'_n|\} = 1.$$

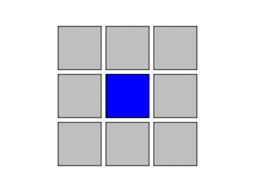
Adjacence et connexité

Un point de $\mathbb{Z}^2$ est un pixel et un point de $\mathbb{Z}^n$, un voxel.

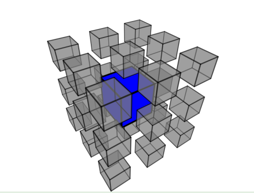
Definition (0-Adjacence)

Soient $\mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_n)$ et $\mathbf{V'} = (V'_1, \ldots, V'_n)$.
Les voxels $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V'}$ sont 0-voisins ou 0-adjacents si et seulement si :

$$\|\mathbf{V} - \mathbf{V'}\|_\infty = \max\{|V_1 - V'_1|, \ldots, |V_n - V'_n|\} = 1.$$



pixels



voxels

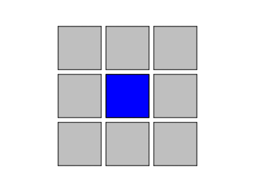
Adjacence et connexité

Un point de $\mathbb{Z}^2$ est un pixel et un point de $\mathbb{Z}^n$, un voxel.

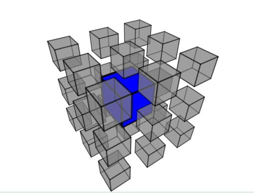
Definition (0-Adjacence)

Soient $\mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_n)$ et $\mathbf{V'} = (V'_1, \ldots, V'_n)$.
Les voxels $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V'}$ sont 0-voisins ou 0-adjacents si et seulement si :

$$\|\mathbf{V} - \mathbf{V'}\|_\infty = \max\{|V_1 - V'_1|, \ldots, |V_n - V'_n|\} = 1.$$



pixels



voxels

Definition (0-Connexité)

Soit E un ensemble de voxel. Il est dit 0-connexe si pour chacun des couples de voxels qu'il contient, il existe une chaîne de 0-voisins les reliant.

Droite discrète arithmétique

Droite discrète arithmétique

La droite discrète arithmétique $\mathrm{D}(\mathbf{n}, \mu, \omega)$ de *vecteur normal* $\mathbf{n} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, d'*ordonnée à l'origine* $\mu \in \mathbb{R}$ et d' épaisseur $\omega \in \mathbb{R}_+$ est le sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2$ défini par :

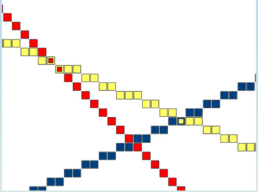
$$\mathrm{D}(\mathbf{n}, \mu, \omega) = \left\{ (i, j) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\frac{\omega}{2} \leq ai + bj + \mu < \frac{\omega}{2} \right\}. \quad (1)$$

Reveillès, J.-P.
Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique.
Thèse d'Etat, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991.

Tracé de Bresenham et droite arithmétique

Droites naives

Une *droite arithmétique discrète* $\mathfrak{D}(\mathbf{v}, \mu, \omega)$ est naive si $\omega = \|\mathbf{n}\|_\infty$.



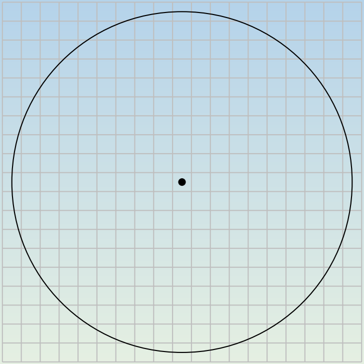
Droite discrète naive.

Droite naive et tracé de Bresenham

La *droite arithmétique naive* $\mathfrak{D}(\mathbf{v}, \mu, \|\mathbf{n}\|_\infty)$ décrit la droite de bresenham de même paramètre.

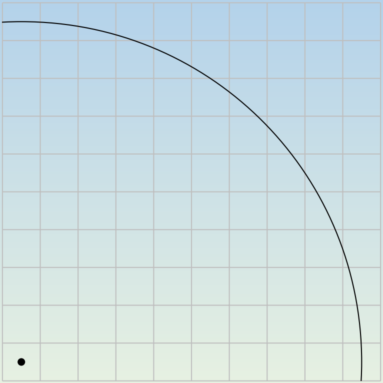
BRESENHAM, J.
Algorithm for Computer Control of a Digital Plotter.
IBM Systems Journal, 4(1), pp. 25-30, 1964.

Tracé de cercle de J. Bresenham



BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

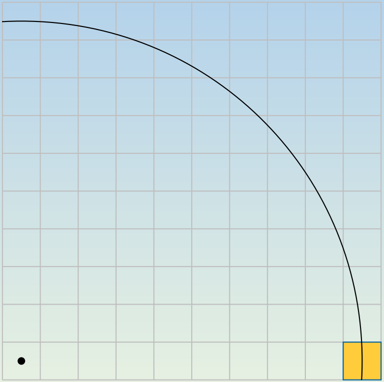
Tracé de cercle de J. Bresenham



- Calcul sur un seul quadrant,

BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

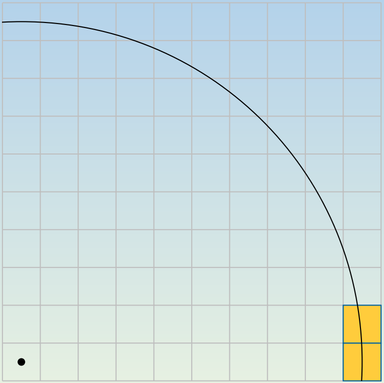
Tracé de cercle de J. Bresenham



- Calcul sur un seul quadrant,
- Initialisation sur un pixel trivial du cercle,

BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

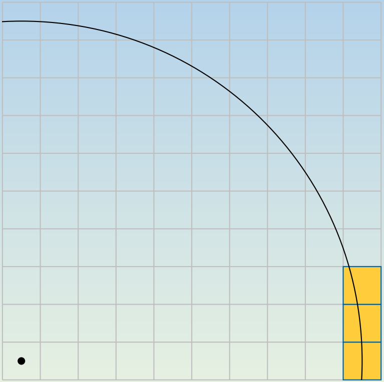
Tracé de cercle de J. Bresenham



- Calcul sur un seul quadrant,
- Initialisation sur un pixel trivial du cercle,
- Détermination incrémental du pixel suivant,

BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

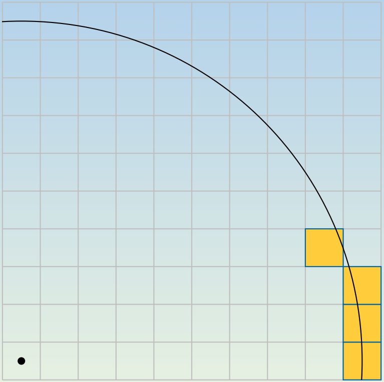
Tracé de cercle de J. Bresenham



- Calcul sur un seul quadrant,
- Initialisation sur un pixel trivial du cercle,
- Détermination incrémental du pixel suivant,

BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

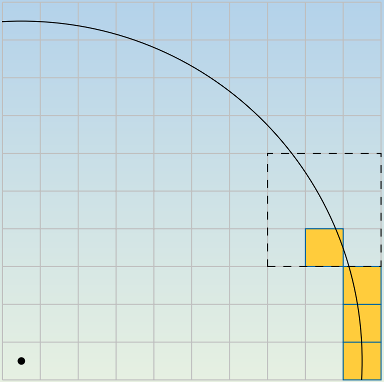
Tracé de cercle de J. Bresenham



- Calcul sur un seul quadrant,
- Initialisation sur un pixel trivial du cercle,
- Détermination incrémental du pixel suivant,

BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

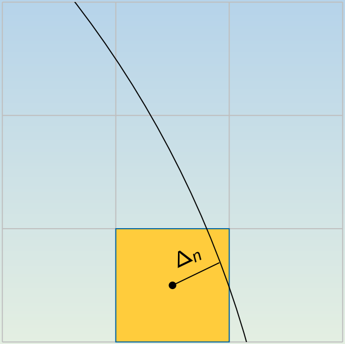
Tracé de cercle de J. Bresenham



- Calcul sur un seul quadrant,
- Initialisation sur un pixel trivial du cercle,
- Détermination incrémental du pixel suivant,

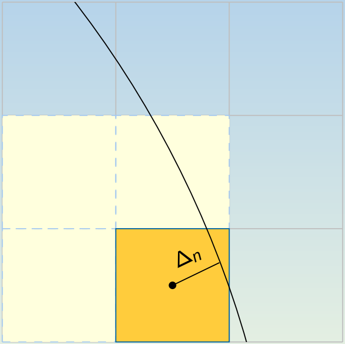
BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

Tracé de cercle de J. Bresenham



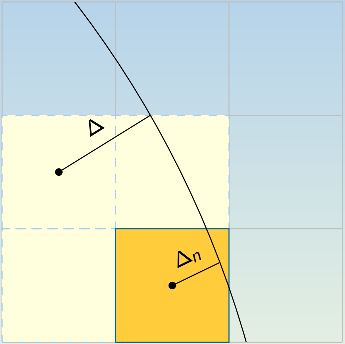
BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

Tracé de cercle de J. Bresenham



BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

Tracé de cercle de J. Bresenham



BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

$$\Delta = (i_n - 1)^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$

- si $\Delta < 0 \longrightarrow 1^{er}$ octant : $j_{n+1} = j_n + 1$

$$\delta = i_n^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$
$$d = \Delta + \delta$$

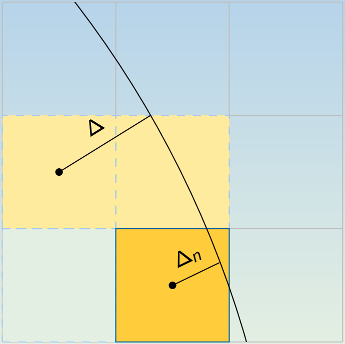
  - $d > 0 : i_{n+1} = i_n - 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$,
  - $d \leq 0 : i_{n+1} = i_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,

- si $\Delta > 0 \longrightarrow 2^{nd}$ octant : $i_{n+1} = i_n - 1$

$$\delta = (i_n - 1)^2 + (j_n)^2 - r^2$$
$$d = \Delta + \delta$$

  - $d > 0 : j_{n+1} = j_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,
  - $d \leq 0 : j_{n+1} = j_n + 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$.

Tracé de cercle de J. Bresenham



$$\Delta = (i_n - 1)^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$

- si $\Delta < 0 \longrightarrow 1^{er}$ octant : $j_{n+1} = j_n + 1$

$$\delta = i_n^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$

$$d = \Delta + \delta$$

  - $d > 0$: $i_{n+1} = i_n - 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$,
  - $d \leq 0$: $i_{n+1} = i_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,

- si $\Delta > 0 \longrightarrow 2^{nd}$ octant : $i_{n+1} = i_n - 1$

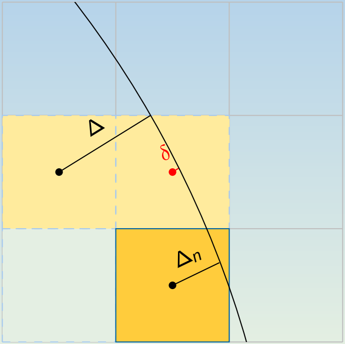
$$\delta = (i_n - 1)^2 + (j_n)^2 - r^2$$

$$d = \Delta + \delta$$

  - $d > 0$: $j_{n+1} = j_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,
  - $d \leq 0$: $j_{n+1} = j_n + 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$.

BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

Tracé de cercle de J. Bresenham



BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

$$\Delta = (i_n - 1)^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$

- si $\Delta < 0 \longrightarrow 1^{er}$ octant : $j_{n+1} = j_n + 1$

$$\delta = i_n^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$

$$d = \Delta + \delta$$

  - $d > 0 : i_{n+1} = i_n - 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$,
  - $d \leq 0 : i_{n+1} = i_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,

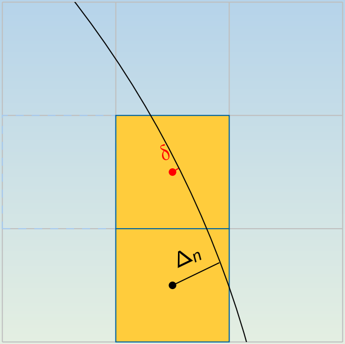
- si $\Delta > 0 \longrightarrow 2^{nd}$ octant : $i_{n+1} = i_n - 1$

$$\delta = (i_n - 1)^2 + (j_n)^2 - r^2$$

$$d = \Delta + \delta$$

  - $d > 0 : j_{n+1} = j_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,
  - $d \leq 0 : j_{n+1} = j_n + 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$.

Tracé de cercle de J. Bresenham



BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

$$\Delta = (i_n - 1)^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$

- si $\Delta < 0 \longrightarrow 1^{er}$ octant : $j_{n+1} = j_n + 1$

$$\delta = i_n^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$
$$d = \Delta + \delta$$

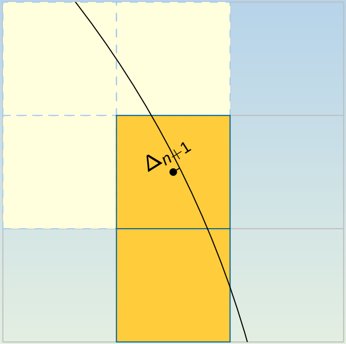
  - $d > 0 : i_{n+1} = i_n - 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$,
  - $d \leq 0 : i_{n+1} = i_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,

- si $\Delta > 0 \longrightarrow 2^{nd}$ octant : $i_{n+1} = i_n - 1$

$$\delta = (i_n - 1)^2 + (j_n)^2 - r^2$$
$$d = \Delta + \delta$$

  - $d > 0 : j_{n+1} = j_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,
  - $d \leq 0 : j_{n+1} = j_n + 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$.

Tracé de cercle de J. Bresenham



BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

$$\Delta = (i_n - 1)^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$

- si $\Delta < 0 \longrightarrow 1^{er}$ octant : $j_{n+1} = j_n + 1$

$$\delta = i_n^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$
$$d = \Delta + \delta$$

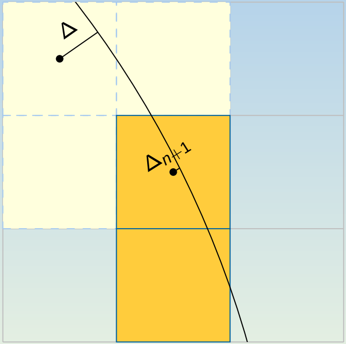
  - $d > 0 : i_{n+1} = i_n - 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$,
  - $d \leq 0 : i_{n+1} = i_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,
- si $\Delta > 0 \longrightarrow 2^{nd}$ octant : $i_{n+1} = i_n - 1$

$$\delta = (i_n - 1)^2 + (j_n)^2 - r^2$$

$$d = \Delta + \delta$$

  - $d > 0 : j_{n+1} = j_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,
  - $d \leq 0 : j_{n+1} = j_n + 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$.

Tracé de cercle de J. Bresenham



BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

$$\Delta = (i_n - 1)^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$

- si $\Delta < 0 \longrightarrow 1^{er}$ octant : $j_{n+1} = j_n + 1$

$$\delta = i_n^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$
$$d = \Delta + \delta$$

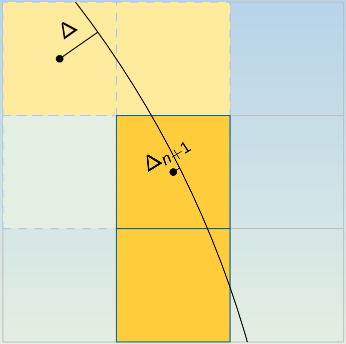
  - $d > 0$: $i_{n+1} = i_n - 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$,
  - $d \leq 0$: $i_{n+1} = i_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,

- si $\Delta > 0 \longrightarrow 2^{nd}$ octant : $i_{n+1} = i_n - 1$

$$\delta = (i_n - 1)^2 + (j_n)^2 - r^2$$
$$d = \Delta + \delta$$

  - $d > 0$: $j_{n+1} = j_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,
  - $d \leq 0$: $j_{n+1} = j_n + 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$.

Tracé de cercle de J. Bresenham



BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

$$\Delta = (i_n - 1)^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$

- si $\Delta < 0 \longrightarrow 1^{er}$ octant : $j_{n+1} = j_n + 1$

$$\delta = i_n^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$
$$d = \Delta + \delta$$

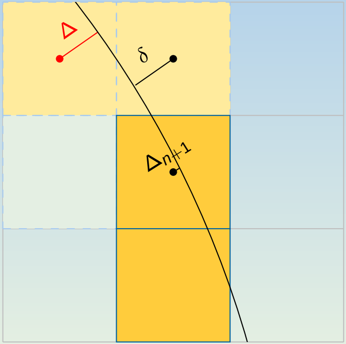
  - $d > 0$: $i_{n+1} = i_n - 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$,
  - $d \leq 0$: $i_{n+1} = i_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,

- si $\Delta > 0 \longrightarrow 2^{nd}$ octant : $i_{n+1} = i_n - 1$

$$\delta = (i_n - 1)^2 + (j_n)^2 - r^2$$
$$d = \Delta + \delta$$

  - $d > 0$: $j_{n+1} = j_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,
  - $d \leq 0$: $j_{n+1} = j_n + 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$.

Tracé de cercle de J. Bresenham



BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

$$\Delta = (i_n - 1)^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$

- si $\Delta < 0 \longrightarrow 1^{er}$ octant : $j_{n+1} = j_n + 1$

$$\delta = i_n^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$
$$d = \Delta + \delta$$

  - $d > 0 : i_{n+1} = i_n - 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$,
  - $d \leq 0 : i_{n+1} = i_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,

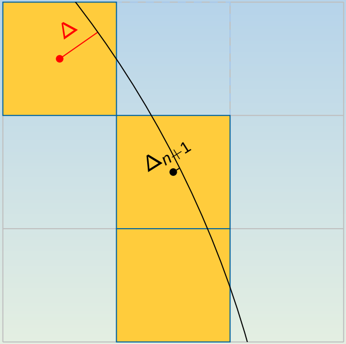
- si $\Delta > 0 \longrightarrow 2^{nd}$ octant : $i_{n+1} = i_n - 1$

$$\delta = (i_n - 1)^2 + (j_n)^2 - r^2$$

$$d = \Delta + \delta$$

  - $d > 0 : j_{n+1} = j_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,
  - $d \leq 0 : j_{n+1} = j_n + 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$.

Tracé de cercle de J. Bresenham



BRESENHAM, J.
A Linear Algorithm for Incremental Digital Display of Circular Arcs.
Communication of the ACM, 20(2), pp. 100-106, 1977.

$$\Delta = (i_n - 1)^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$

- si $\Delta < 0 \longrightarrow 1^{er}$ octant : $j_{n+1} = j_n + 1$

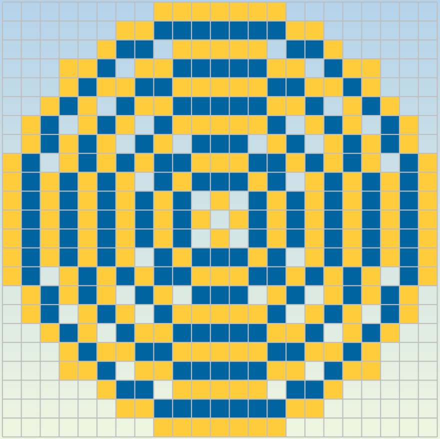
$$\delta = i_n^2 + (j_n + 1)^2 - r^2$$
$$d = \Delta + \delta$$

  - $d > 0$: $i_{n+1} = i_n - 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$,
  - $d \leq 0$: $i_{n+1} = i_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,
- si $\Delta > 0 \longrightarrow 2^{nd}$ octant : $i_{n+1} = i_n - 1$

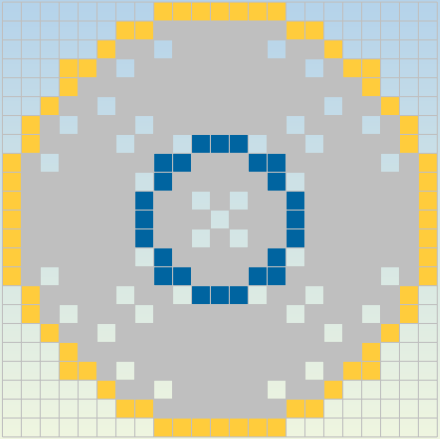
$$\delta = (i_n - 1)^2 + (j_n)^2 - r^2$$
$$d = \Delta + \delta$$

  - $d > 0$: $j_{n+1} = j_n$ et $\Delta_{n+1} = \delta$,
  - $d \leq 0$: $j_{n+1} = j_n + 1$ et $\Delta_{n+1} = \Delta$.

Cercles de Bresenham



Cercles de Bresenham



Erreurs de tracé

Uniquement sur les diagonales et quand :

$$r^2 = 2i^2 - i + 1$$

n	i	r
1	0	1
2	3	4
3	8	11
4	95	134
5	264	373
6	3 219	4 552
7	8 960	12 671
8	10 9343	154 634
9	304 368	430 441
10	3 714 435	5 253 004
...	...	...

KULPA, Z.
On the Properties of Discrete Circles, Rings, and Disks.
Computer Graphics and Image Processing, 10, pp. 348-365, 1979.

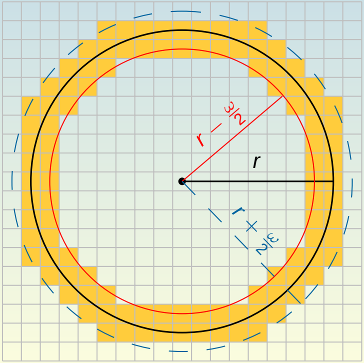
MCILROY, M. D.
Best Approximate Circles on Integer Grids.
ACM Transactions on Graphics, 2(4), pp. 237-263, 1983.

Cercle discret analytique

Cercle discret analytique

Le cercle discret analytique $\mathbb{C}(\mathbf{M_0}, r, \omega)$ de centre $\mathbf{M_0} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, de rayon $r \in \mathbb{R}_+^\star$ et d'épaisseur $\omega \in \mathbb{R}_+^\star$, est l'ensemble suivant de $\mathbb{Z}^2$:

$$\mathbb{C}(\mathbf{M_0}, r, \omega) = \left\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 | \left(r - \frac{\omega}{2}\right)^2 \leq (i - x_0)^2 + (j - y_0)^2 < \left(r + \frac{\omega}{2}\right)^2\right\}.$$

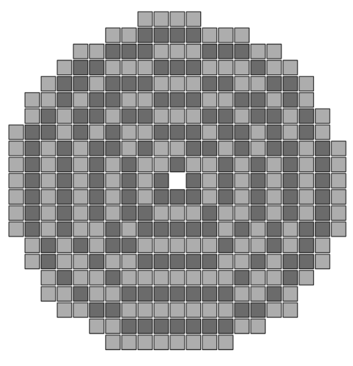


ANDRES, E.
Discrete circles, rings and spheres.
Computers & Graphics , 18(5), pp. 695-706, 1994.

ANDRES, E. AND JACOB M.-A.
The Discrete Analytical Hyperspheres.
IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 3(1), pp. 75-86, 1997.

Propriétés des cercles analytiques

- Pavage du plan par des cercles concentriques de rayon entier et d'épaisseur $\omega = 1$ (cercles réguliers) :

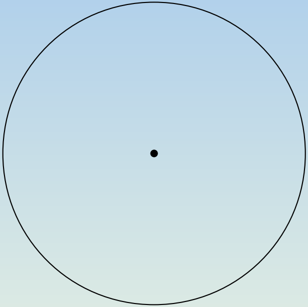


- Pas de caractérisation de la connexité en fonction de l'épaisseur (minimalité).

Approche géométrique
Approximation par les tangentes

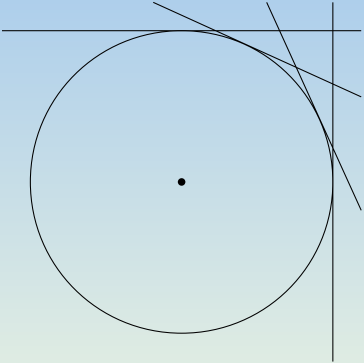
Approche géométrique

Approximation par les tangentes



$$\mathcal{C}(N_0, r) : (x - i_0)^2 + (y - j_0)^2 - r^2 = 0$$

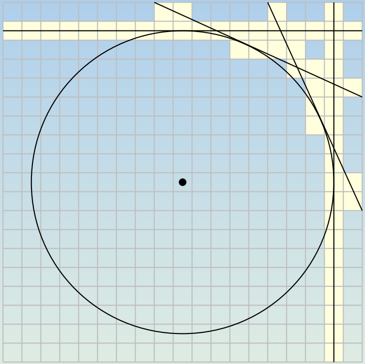
Approche géométrique
Approximation par les tangentes



$$\mathcal{C}(N_0, r) : (x - i_0)^2 + (y - j_0)^2 - r^2 = 0$$

$$\mathcal{T}_{M_k}(\mathcal{C}) : 2(x - i_0)(x - x_k) + 2(y - j_0)(y - y_k) = 0$$

Approche géométrique
Approximation par les tangentes



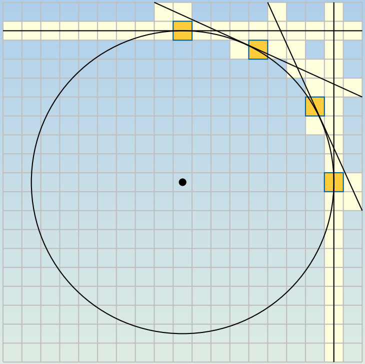
$$\mathcal{C}(N_0, r) : (x - i_0)^2 + (y - j_0)^2 - r^2 = 0$$

$$\mathcal{T}_{M_k}(\mathcal{C}) : 2(x - i_0)(x - x_k) + 2(y - j_0)(y - y_k) = 0$$

$$\mathrm{T}_{M_k}(\mathcal{C}) : -\frac{\|(2(i - i_0), 2(j - j_0))\|_\infty}{2} \leq 2(i - i_0)(i - x_k) + 2(i - j_0)(i - y_k) < \frac{\|(2(i - i_0), 2(j - j_0))\|_\infty}{2}$$

Approche géométrique

Approximation par les tangentes



$$\mathcal{C}(N_0, r) : (x - i_0)^2 + (y - j_0)^2 - r^2 = 0$$

$$\mathcal{T}_{M_k}(\mathcal{C}) : 2(x - i_0)(x - x_k) + 2(y - j_0)(y - y_k) = 0$$

$$\mathrm{T}_{M_k}(\mathcal{C}) : -\frac{\|(2(i - i_0), 2(j - j_0))\|_\infty}{2} \leq 2(i - i_0)(i - x_k) + 2(i - j_0)(i - y_k) < \frac{\|(2(i - i_0), 2(j - j_0))\|_\infty}{2}$$

Cercles discrets ?

$$\mathrm{C}(N_0, r) : -\frac{\|(2(i - i_0), 2(j - j_0))\|_\infty}{2} \leq (i - i_0)^2 + 2(j - j_0)^2 - r^2 < \frac{\|(2(i - i_0), 2(j - j_0))\|_\infty}{2}$$

Approche analytique

Transposition du comportement des droites discrètes arithmétiques

Droites discrètes naives

$$d_{a,b,\mu} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & ax + by + \mu \end{array}$$

a et b sont les dérivées partielles de d. On obtient une droite discrète naive en appliquant $\|\cdot\|_\infty$ au vecteur $(\partial_x d, \partial_y d)$.

$$-\frac{\|(\partial_x d(i,j), \partial_y d(i,j))\|_\infty}{2} \leq d(i,j) < \frac{\|(\partial_x d(i,j), \partial_y d(i,j))\|_\infty}{2}$$

Approche analytique

Transposition du comportement des droites discrètes arithmétiques

Droites discrètes naives

$$\begin{aligned} d_{a,b,\mu} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto ax + by + \mu \end{aligned}$$

a et b sont les dérivées partielles de d. On obtient une droite discrète naive en appliquant $\|\cdot\|_\infty$ au vecteur $(\partial_x d, \partial_y d)$.

$$-\frac{\|(\partial_x d(i,j), \partial_y d(i,j))\|_\infty}{2} \leq d(i,j) < \frac{\|(\partial_x d(i,j), \partial_y d(i,j))\|_\infty}{2}$$

Cercles discrets ?

$$\begin{aligned} c_{N_0,r} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x - i_0)^2 + (y - j_0)^2 - r^2 \end{aligned}$$

$$-\frac{\|(\partial_x c(i,j), \partial_y c(i,j))\|_\infty}{2} \leq c(i,j) < \frac{\|(\partial_x c(i,j), \partial_y c(i,j))\|_\infty}{2}$$

Cercle discret minimal intérieur

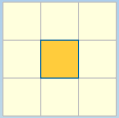
Definition

Soit $\mathbf{N_0} = (i_0, j_0) \in \mathbb{R}^2$, $r \in \mathbb{R}_+$.
Le cercle discret minimal intérieur $\mathrm{C}(\mathbf{N_0}, r)$ de *centre* $\mathbf{N_0}$ et de *rayon* r est l'ensemble suivant :

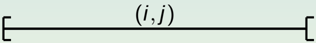
$$\mathrm{C}(\mathbf{N_0}, r) = \left\{ (i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\frac{\| (2(i-i_0), 2(j-j_0)) \|_\infty}{2} \leq c(i,j) < \frac{\| (2(i-i_0), 2(j-j_0)) \|_\infty}{2} \right\}.$$

Propriétés

$i > j > 0$

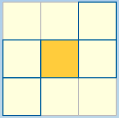


$$(i,j) \quad : \quad -i \leq i^2 + j^2 - r^2 < i$$

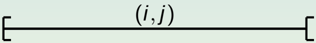


Propriétés

$i > j > 0$

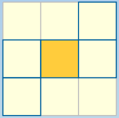


$$
\begin{array}{lclcccl}
(i-1,j-1) & : & -(i-1) & \leq & (i-1)^2+(j-1)^2-r^2 & < & i-1 \\
(i-1,j) & : & -(i-1) & \leq & (i-1)^2+j^2-r^2 & < & i-1 \\
(i,j) & : & -i & \leq & i^2+j^2-r^2 & < & i \\
(i+1,j) & : & -(i+1) & \leq & (i+1)^2+j^2-r^2 & < & i+1 \\
(i+1,j+1) & : & -(i+1) & \leq & (i+1)^2+(j+1)^2-r^2 & < & i+1
\end{array}
$$

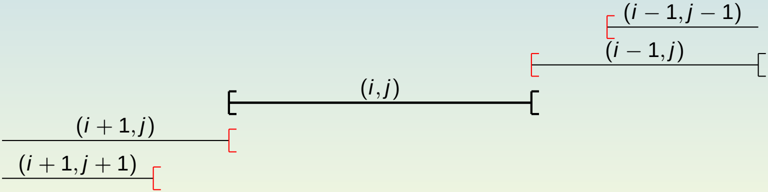


Propriétés

$i > j > 0$

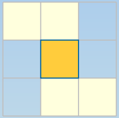


$$
\begin{array}{lclcccl}
(i-1,j-1) & : & \color{red}{i+2j-1} & \leq & i^2+j^2-r^2 & < & 3i+2j-3 \\
(i-1,j) & : & \color{red}{i} & \leq & i^2+j^2-r^2 & < & 3i-2 \\
(i,j) & : & -i & \leq & i^2+j^2-r^2 & < & i \\
(i+1,j) & : & -3i-2 & \leq & i^2+j^2-r^2 & < & \color{red}{-i} \\
(i+1,j+1) & : & -3i-2j+3 & \leq & i^2+j^2-r^2 & < & \color{red}{-i-2j-1}
\end{array}
$$

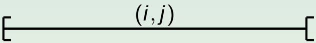


Propriétés

$i > j > 0$

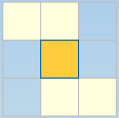


$$(i,j) \quad : \quad -i \leq i^2 + j^2 - r^2 < i$$

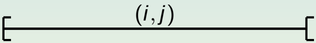


Propriétés

$i > j > 0$

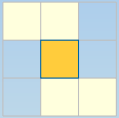


$$
\begin{array}{llcll}
(i-1,j+1) & : & -(i-1) & \leq & (i-1)^2+(j-1)^2-r^2 & < & i-1 \\
(i,j+1) & : & -i & \leq & (i-1)^2+j^2-r^2 & < & i \\
(i,j) & : & -i & \leq & i^2+j^2-r^2 & < & i \\
(i,j-1) & : & -i & \leq & (i+1)^2+j^2-r^2 & < & i \\
(i+1,j-1) & : & -(i+1) & \leq & (i+1)^2+(j-1)^2-r^2 & < & i+1
\end{array}
$$



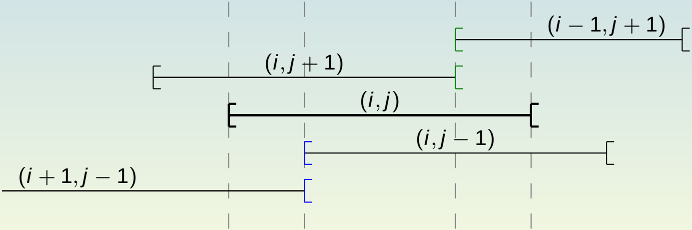
Propriétés

$i > j > 0$



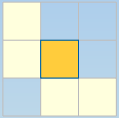
Minimalité sur chaque octant,

$$
\begin{array}{llllll}
(i-1,j+1) & : & i-2j-1 & \leq & i^2+j^2-r^2 & < 3i-2j-3 \\
(i,j+1) & : & -i-2j-1 & \leq & i^2+j^2-r^2 & < i-2j-1 \\
(i,j) & : & -i & \leq & i^2+j^2-r^2 & < i \\
(i,j-1) & : & -i+2j-1 & \leq & i^2+j^2-r^2 & < i+2j-1 \\
(i+1,j-1) & : & -3i+2j-3 & \leq & i^2+j^2-r^2 & < -i+2j-1
\end{array}
$$



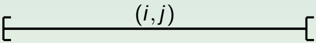
Propriétés

$i = j$



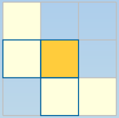
Minimalité sur chaque octant,

$$(i, i) \quad : \quad -i \leq i^2 + i^2 - r^2 < i$$



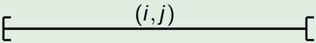
Propriétés

$i = j$

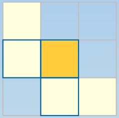


Minimalité sur chaque octant,

$$
\begin{array}{lcrccc}
(i-1, i) & : & -i & \leq & (i-1)^2 + i^2 - r^2 & < & i \\
(i, i) & : & -i & \leq & i^2 + i^2 - r^2 & < & i \\
(i, i-1) & : & -i & \leq & i^2 + (i-1)^2 - r^2 & < & i
\end{array}
$$

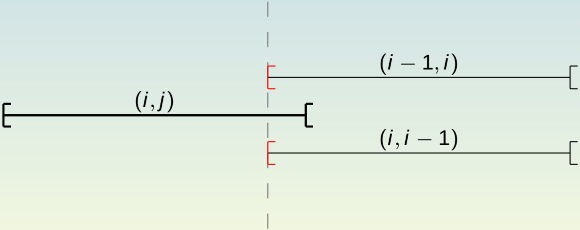


Propriétés
$i = j$



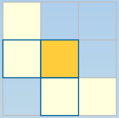
Minimalité sur chaque octant,

$$
\begin{array}{llllll}
(i-1,i) & : & \color{red}{i-1} & \leq & i^2+i^2-r^2 & < 3i-1 \\
(i,i) & : & -i & \leq & i^2+i^2-r^2 & < i \\
(i,i-1) & : & \color{red}{i-1} & \leq & i^2+i^2-r^2 & < 3i-1
\end{array}
$$



Propriétés

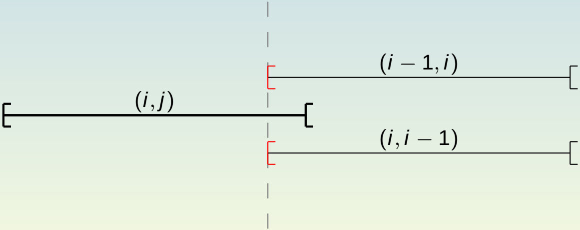
$i = j$



Minimalité sur chaque octant,

Erreurs sur les diagonales quand $r^2 = 2i^2 - i + 1$.

$$
\begin{array}{lclcccl}
(i-1, i) & : & i-1 & \leq & i^2 + i^2 - r^2 & < & 3i - 1 \\
(i, i) & : & -i & \leq & i^2 + i^2 - r^2 & < & i \\
(i, i-1) & : & i-1 & \leq & i^2 + i^2 - r^2 & < & 3i - 1
\end{array}
$$



$$r^2 = 2i^2 - i + 1$$

Cercle discret minimal intérieur et tracé de Bresenham

Théorème

Soit $\mathbf{N_0} = (i_0, j_0) \in \mathbb{Z}^2$ et r tel que $r^2 \in \mathbb{N}$. Le cercle de Bresenham $\mathrm{B}(\mathbf{N_0}, r)$ est le cercle discret minimal intérieur $\mathrm{C}(\mathbf{N_0}, r)$:

$$\mathrm{C}(\mathbf{N_0}, r) = \mathbb{B}(\mathbf{N_0}, r).$$

Preuve

- critère de décision pour le tracé de Bresenham : $i - 2j - \frac{3}{2}$,
- critère de décision pour le cercle discret minimal intérieur : $i - 2j - 1$.

Les paramètres sont tous entiers, donc les deux critères sont équivalents.

Conclusion

Résultat principal

Caractérisation arithmétique des tracés de cercles algorithmiques type Bresenham,

Définition de cercles naifs pour tout rayon entier.

Originalité de l'approche

L'épaisseur de la définition arithmétique n'est pas constante comme jusqu'ici mais dépendante du comportement local de la courbe (les dérivées partielles).

Perspectives

Cercles à paramètres non entiers

Extension du tracé de Bresenham pour des coordonnées de centre et des rayons non entiers

PHAM, S.
Digital Circles with Non-Lattice Point Centers.
The Visual Computer, 9(1), pp. 1-24, 1992.

Perspectives

Cercles à paramètres non entiers

Extension du tracé de Bresenham pour des coordonnées de centre et des rayons non entiers

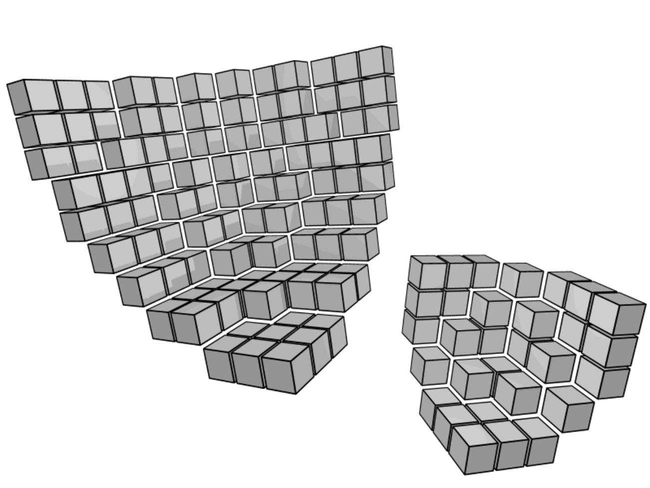
PHAM, S.
Digital Circles with Non-Lattice Point Centers.
The Visual Computer, 9(1), pp. 1-24, 1992.

Dimensions supérieures

Extension naturelle de la définition en dimensions supérieures,

Nombreuses erreurs de tracés.

Perspectives



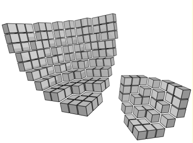
Perspectives

Cercles à paramètres non entiers

Extension du tracé de Bresenham pour des coordonnées de centre et des rayons non entiers

PHAM, S.
Digital Circles with Non-Lattice Point Centers.
The Visual Computer, 9(1), pp. 1-24, 1992.

Dimensions supérieures



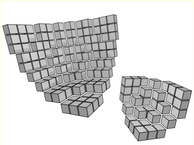
Perspectives

Cercles à paramètres non entiers

Extension du tracé de Bresenham pour des coordonnées de centre et des rayons non entiers

PHAM, S.
Digital Circles with Non-Lattice Point Centers.
The Visual Computer, 9(1), pp. 1-24, 1992.

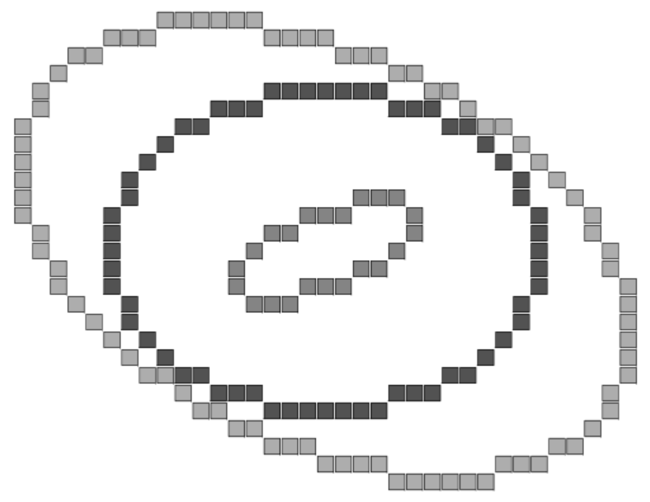
Dimensions supérieures



Courbes discrètes

Extension de la définition des cercles à d'autres courbes discrètes.

Perspectives



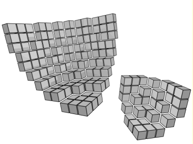
Perspectives

Cercles à paramètres non entiers

Extension du tracé de Bresenham pour des coordonnées de centre et des rayons non entiers

PHAM, S.
Digital Circles with Non-Lattice Point Centers.
The Visual Computer, 9(1), pp. 1-24, 1992.

Dimensions supérieures



Courbes discrètes