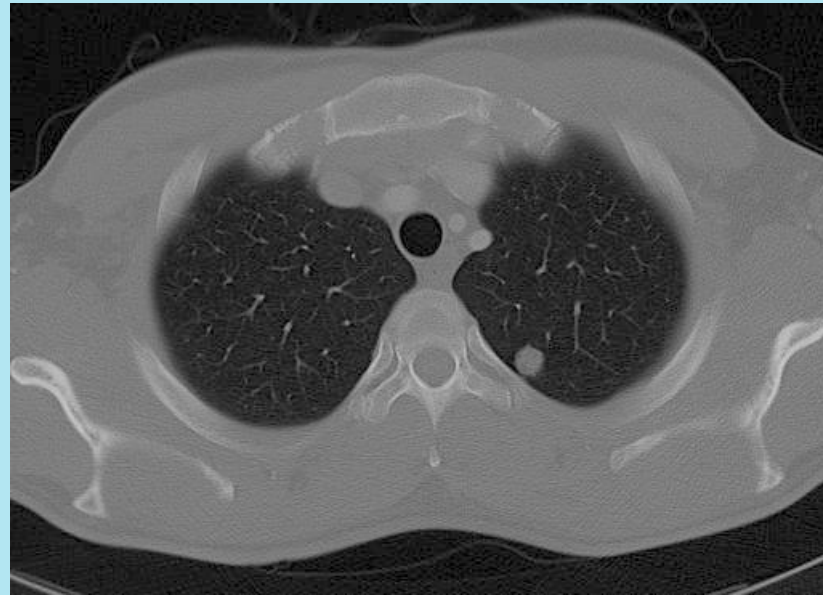
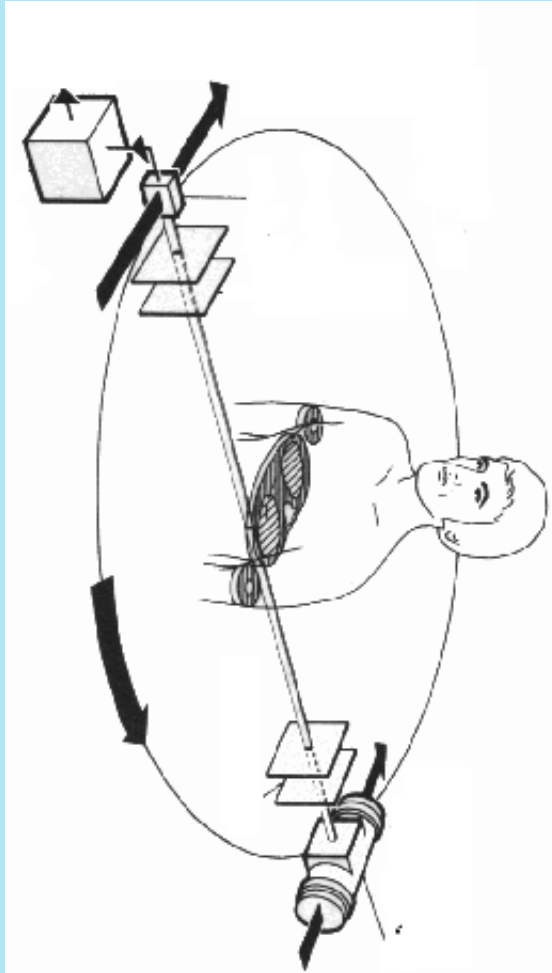


Reconstruction et stabilité en tomographie des convexes discrets

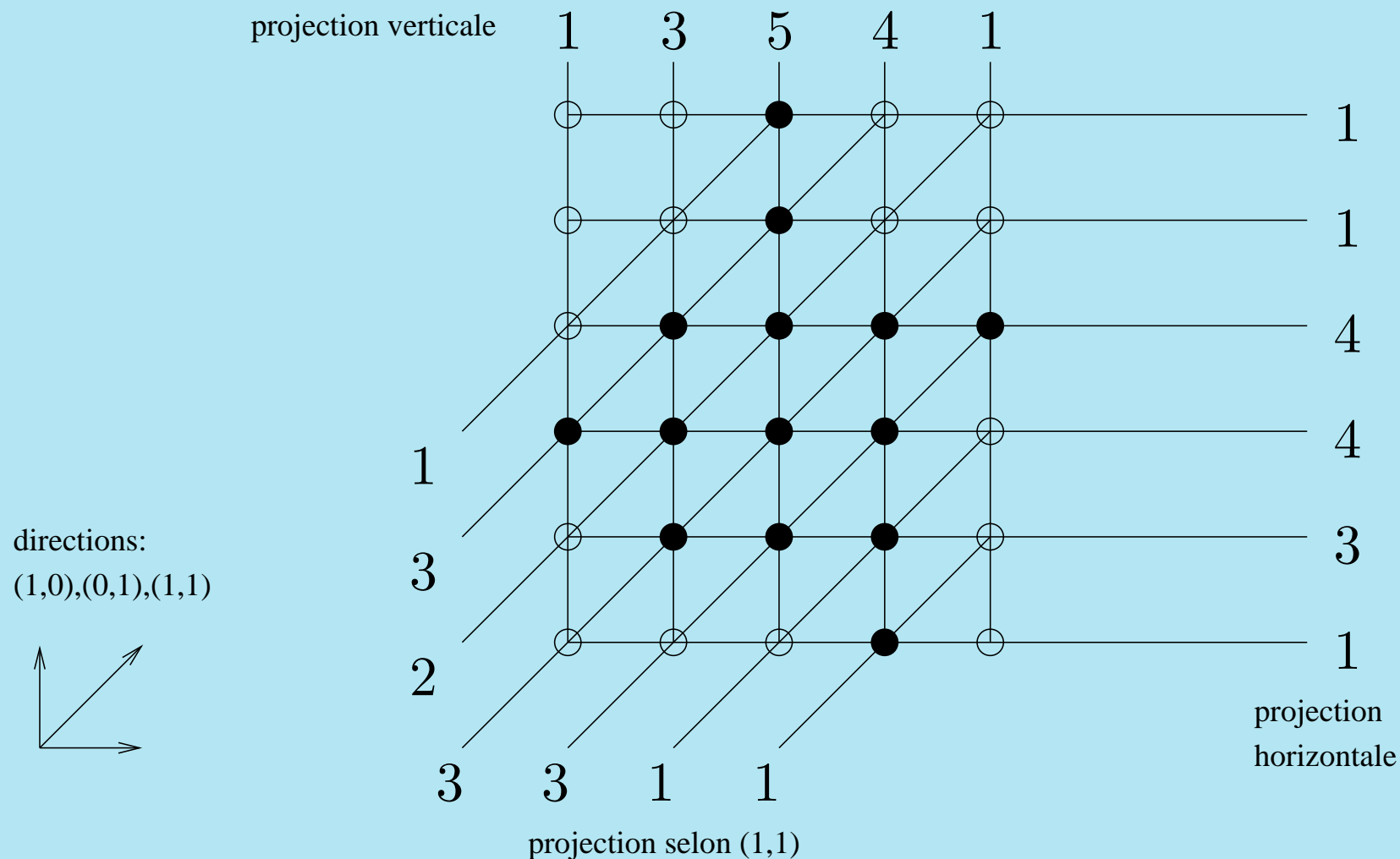
Alain Daurat
LSIIT, Strasbourg, France

JIG2006, 2 juin 2006

Tomographie : Reconstruction d'une image interne d'un objet sans le découper.



Tomographie discrète



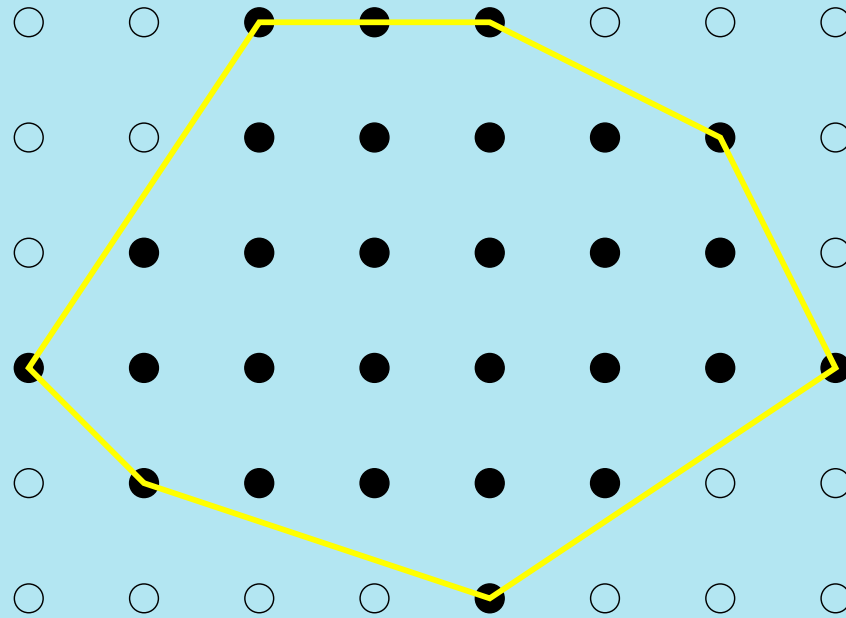
Si $E \subset \mathbb{Z}^2$ et p est une direction dirigée par (a, b) ,
 $\text{proj}_p E(k) = |\{M \in E : bx - ay = k\}|$.

Le problème général de la reconstruction d'une partie de \mathbb{Z}^2 à partir d'un nombre fini de projections est toujours sous-déterminé, de plus pour plus de trois directions il est NP-difficile.

→ nécessité d'imposer une contrainte supplémentaire sur la partie reconstruite.

Dans cet exposé on impose des contraintes de type convexité.

Convexité



Une partie de \mathbb{Z}^2 est un convexe discret si elle l'intersection d'un polygone convexe avec \mathbb{Z}^2 .

Approche traditionnelle

Résolution d'un système linéaire sous-déterminé

$$\sum_{ai-bj=k} v_{i,j} = \text{proj}_{(a,b)}(k), \quad v_{i,j} \in \mathbb{R}$$

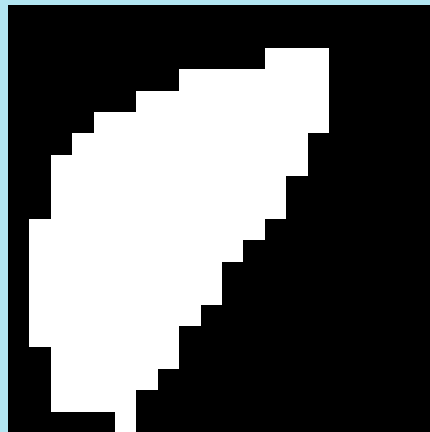
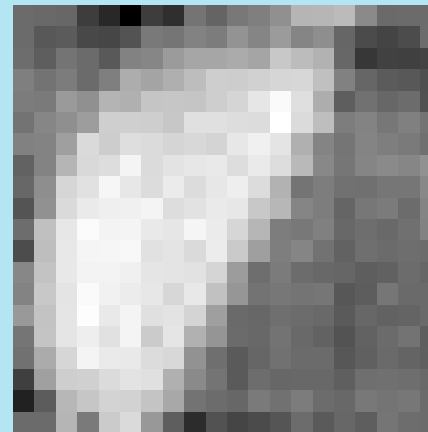


image à
reconstruire



reconstruction à partir
des projections exactes selon
(1, 0), (0, 1), (2, 1), (1, -2)
par moindres carrés avec
régularisation géométrique

Modèle très souple, mais aucune validation théorique pour un faible nombre de projections.

Approche de cet exposé

Résolution du système :

$$\sum_{ai-bj=k} v_{i,j} = \text{proj}_{(a,b)}(k), \quad v_{i,j} \in \{0, 1\}$$

avec $E = \{(i, j) : v_{i,j} = 1\}$ vérifie des propriétés de type convexité.

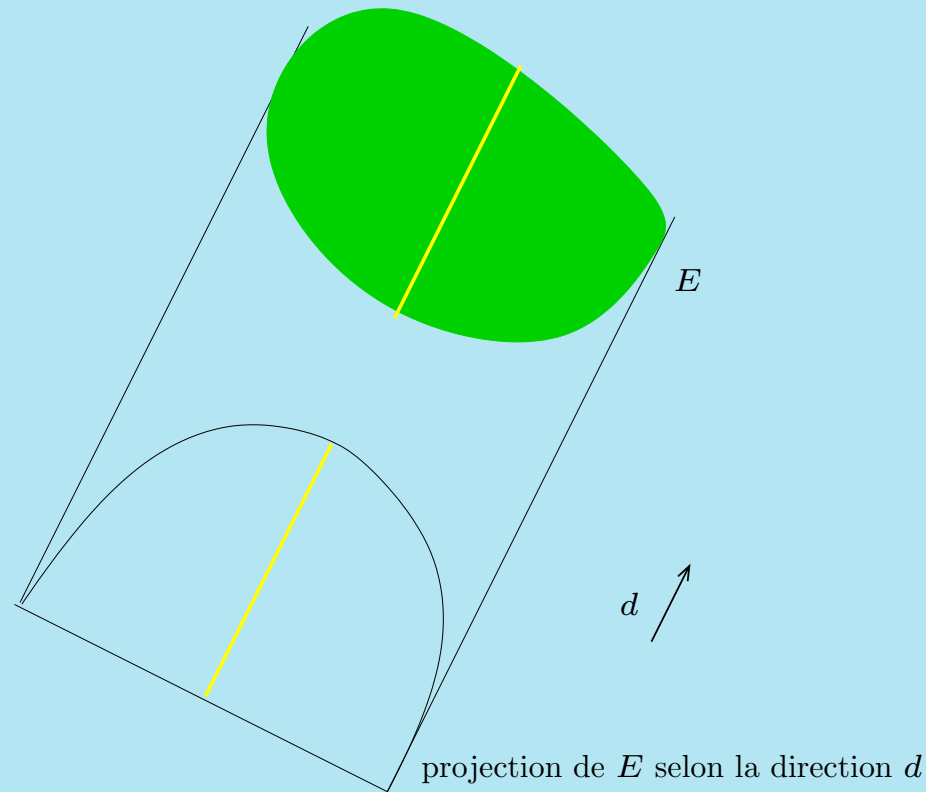
Plan de l'exposé

1. **Unicité**
2. Stabilité
3. Algorithme de reconstruction
4. Convergence

Détermination par un ensemble de directions

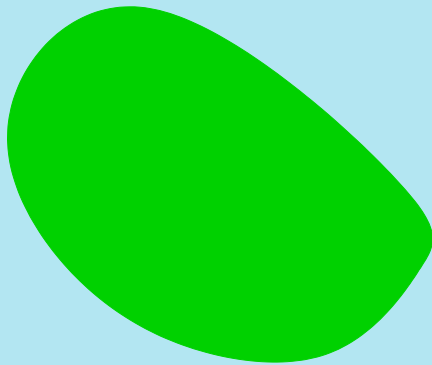
Déf : Un ensemble \mathcal{D} de directions détermine les convexes discrets si deux convexes discrets n'ont jamais les mêmes projections selon \mathcal{D} .

Tomographie « géométrique »



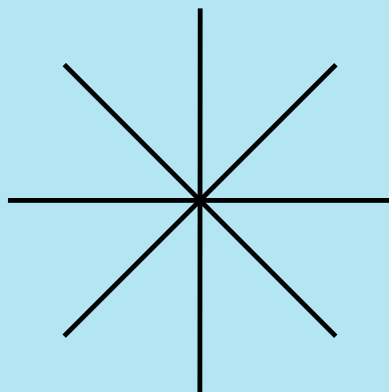
Si p est dirigé par (a, b) et $E \subset \mathbb{R}^2$,
 $\text{proj}_p E(k) = \text{longueur}(\{M \in E : bx - ay = k\})$.

Déf : Un corps convexe est un convexe borné de \mathbb{R}^2 qui est la fermeture de son intérieur.

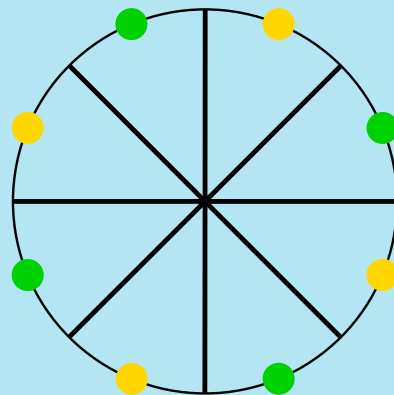


Déf : Un ensemble \mathcal{D} de directions détermine les corps convexes si deux corps convexes n'ont jamais les mêmes projections selon \mathcal{D} .

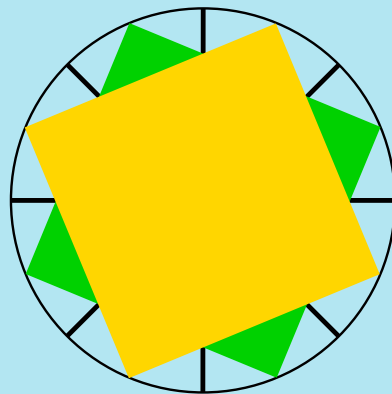
Un ensemble de directions uniformément réparti ne détermine jamais les corps convexes.



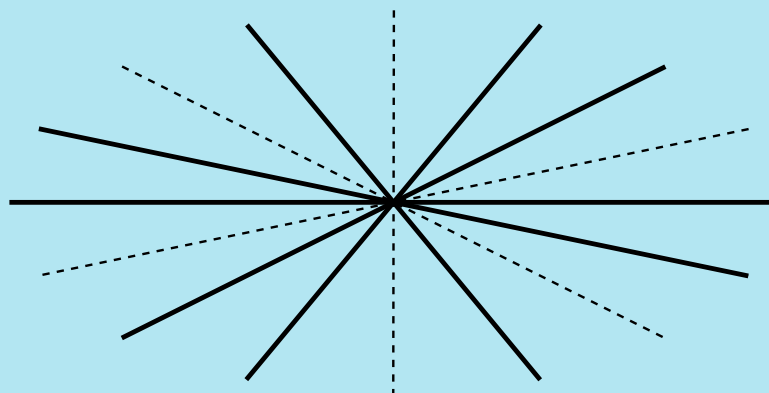
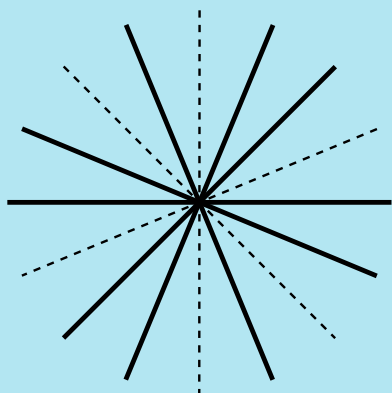
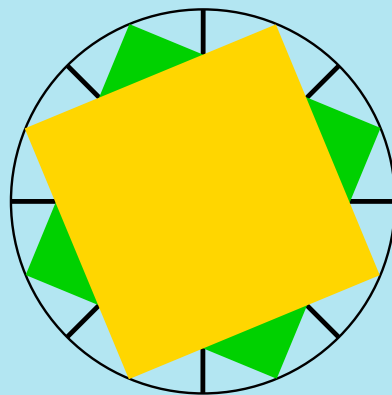
Un ensemble de directions uniformément réparti ne détermine jamais les corps convexes.



Un ensemble de directions uniformément réparti ne détermine jamais les corps convexes.



Un ensemble de directions uniformément réparti ne détermine jamais les corps convexes.



Donc les transformées linéaires de parties d'ensembles de directions uniformément réparties ne détermine pas les corps convexes.

Thm [GM 80] : Un ensemble de directions détermine les corps convexes si et seulement si il **n'est pas** l'image par une transformation linéaire d'un ensemble de directions uniformément réparties.

Un tel ensemble de directions est appelé un ensemble de directions de Gardner-McMullen

Thm [GM 80] : Un ensemble de directions détermine les corps convexes si et seulement si il **n'est pas** l'image par une transformation linéaire d'un ensemble de directions uniformément réparties.

Un tel ensemble de directions est appelé un ensemble de directions de Gardner-McMullen

Thm [GG 97] : Un ensemble de directions **rationnelles** détermine les convexes discrets si et seulement si c'est un ensemble de directions de Gardner-McMullen.

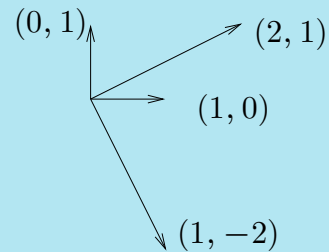
Rq : Une seule direction irrationnelle suffit pour déterminer les parties de \mathbb{Z}^2 .

Un ensemble de trois directions n'est pas de Gardner-McMullen.

Birapport de 4 directions de pente $\lambda_1 < \dots < \lambda_4$:

$$\left[\begin{array}{cc} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{array} \right] = \frac{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_1)}$$

Thm [GG97] : Un ensemble de 4 directions **rationnelles** est de Gardner-McMullen si et seulement si son birapport **n**'est **pas** dans dans $\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$.



$$\left[\begin{array}{cc} -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \infty \end{array} \right] = 5$$

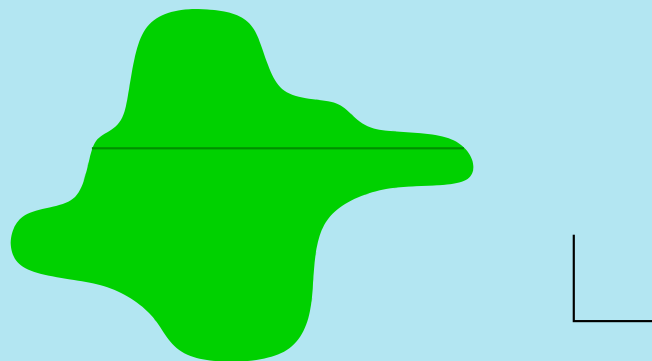
Un ensemble de directions **rationnelles** est de Gardner-McMullen si et seulement si il contient 4 directions dont le birapport **n**'est pas dans $\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2, 3, 4\}$.

Un ensemble de 7 directions **rationnelles** est toujours de Gardner-McMullen.

Extension à une classe de convexité plus faible

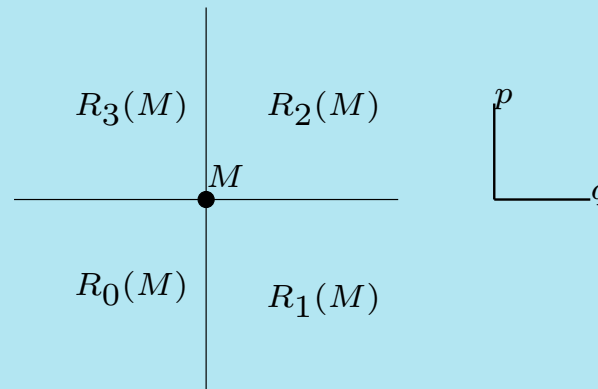
- Cas continu

Déf : Une partie de \mathbb{R}^2 est convexe selon \mathcal{D} si l'intersection avec toute droite parallèle à une direction de \mathcal{D} est convexe.



Thm [BDa 05] : Un ensemble de directions \mathcal{D} détermine les corps connexes et convexes selon \mathcal{D} si et seulement si c'est un ensemble de directions de Gardner-McMullen.

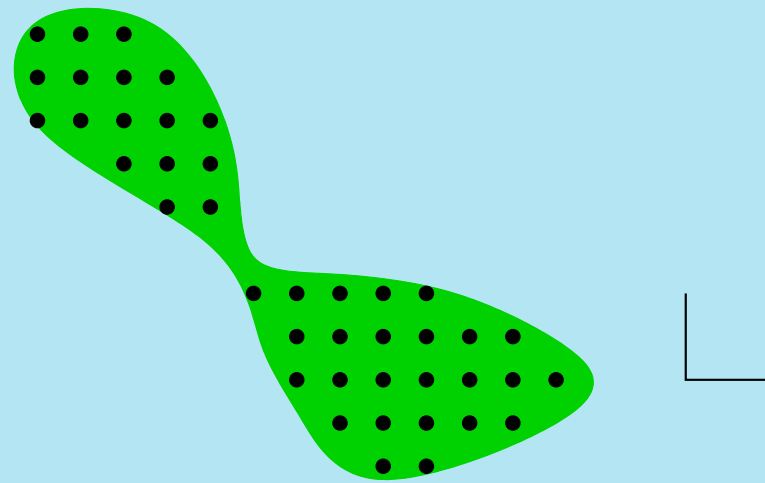
Q-convexité



Une partie E de \mathbb{Z}^2 est Q-convexe selon $\mathcal{D} = \{p, q\}$ si pour tout point M de \mathbb{Z}^2 $R_k^{pq}(M) \cap E \neq \emptyset$ pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ implique $M \in E$.

Une partie E est Q-convexe selon \mathcal{D} si elle est Q-convexe selon toute paire incluse dans \mathcal{D} .

L'intersection d'une partie convexe selon \mathcal{D} et connexe de \mathbb{R}^2 avec \mathbb{Z}^2 est Q-convexe selon \mathcal{D} .

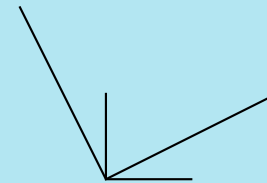
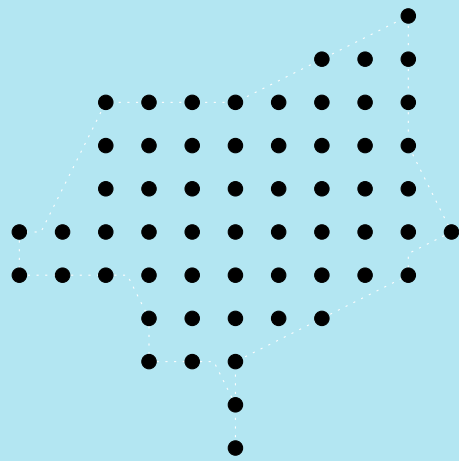


La réciproque est fautive, les intersections des parties convexes selon \mathcal{D} et connexes de \mathbb{R}^2 avec \mathbb{Z}^2 sont les Q-convexes « forts ».

Extension à une classe de convexité plus faible

- Cas discret

Thm [Da 00] : Un ensemble de directions rationnelles \mathcal{D} détermine les \mathbb{Q} -convexes selon \mathcal{D} si et seulement si c'est un ensemble de directions de Gardner-McMullen.



Unicité - Problèmes ouverts

- Un ensemble E est additif selon \mathcal{D} si sa fonction caractéristique est l'unique solution

$$\sum_{ai-bj=k} v_{i,j} = \text{proj}_{(a,b)} E(k), \quad (a, b) \in \mathcal{D}, \quad v_{i,j} \in [0, 1].$$

Conj : Tout convexe discret est additif selon tout ensemble de directions de Gardner-McMullen.

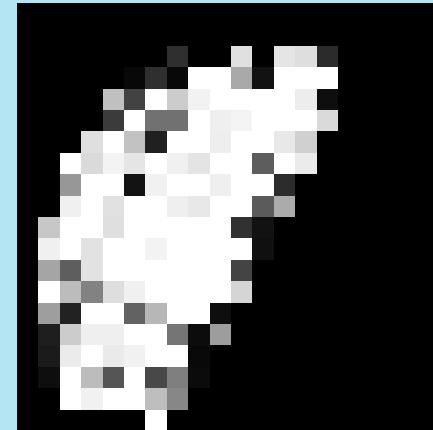
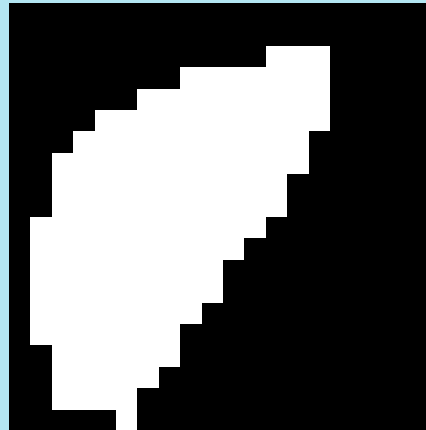
- Extension à \mathbb{Z}^3 avec des directions non coplanaires ?

Plan de l'exposé

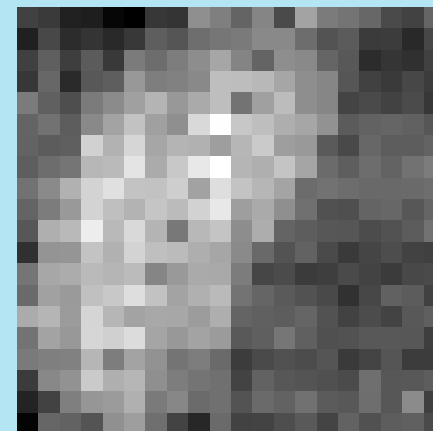
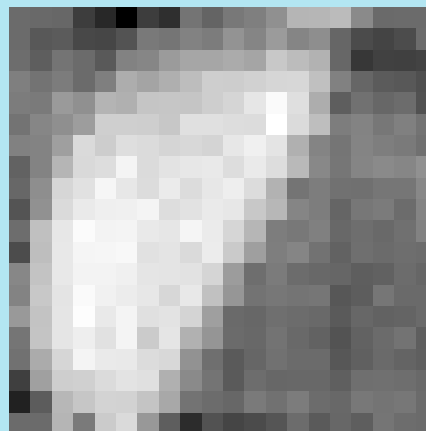
1. Unicité
2. **Stabilité**
3. Algorithme de reconstruction
4. Convergence

Un problème de tomographie est dit **stable** si une petite erreur sur les projections produit une petite erreur sur l'image reconstruite.

BIF :



moindre-carrés :



proj exactes

proj avec bruit
gaussien de 20 %

Reconstruction à partir des projections selon $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 1)$, $(1, -2)$.

Stabilité avec une erreur minimale

$$DX_{\mathcal{D}}(E, F) = \max_{p \in \mathcal{D}} \|\text{proj}_p(E) - \text{proj}_p(F)\|_1$$

$$(|E \Delta F| \leq n \Rightarrow DX_{\mathcal{D}}(E, F) \leq n)$$

Rappel : Il est conjecturé que tout convexe discret est additif selon tout ensemble de directions de Gardner-McMullen

Prop [BDa 03] : Si E et F sont deux ensembles additifs selon \mathcal{D} alors

$$DX_{\mathcal{D}}(E, F) \leq 1 \implies |E \Delta F| \leq 1.$$

Résultats Négatifs

Thm [AGT 00] : Pour tout ensemble de directions \mathcal{D} et nombre n il existe deux ensemble E et F tels que

- E et F sont additifs selon \mathcal{D} , $|E| = |F| \geq n$.
- $DX_{\mathcal{D}}(E, F) \leq 2$
- $E \cap F = \emptyset$.

Mais les exemples pour (E, F) ne sont pas convexes.

Dans le continu : théorème de Volčič

Thm [V 84] : Soit $\mathcal{D} = \{p_1, \dots, p_4\}$ un ensemble de directions de Gardner-McMullen. La fonction $(\text{proj}_{p_1} E, \dots, \text{proj}_{p_4} E) \mapsto E$.

Précisément :

Pour tout $\epsilon_c > 0$ et R , il existe $\eta_c > 0$ tels que $F, F' \subset B(0, R)$, $\text{aire}(F), \text{aire}(F') \geq \epsilon_c$ et

$$\max_{k=1\dots 4} \int_{-\infty}^{+\infty} |\text{proj}_{p_k} F(t) - \text{proj}_{p_k} F'(t)| dt < \eta_c$$

on a $\text{aire}(F \Delta F') < \epsilon_c$.

Version discrète du théorème de Volčič

$$R_{\max}(E) = \max\{\|\overrightarrow{OM}\| : M \in E\}.$$

Thm [BDa 05] : Pour tout $\epsilon > 0$ et $K > 1$, il existe $\eta > 0$, $M > 0$ tel que pour tout convexes discrets E et E' qui vérifient :

- $\frac{|E|}{(R_{\max}(E))^2}, \frac{|E'|}{(R_{\max}(E'))^2} \geq \epsilon,$
- $\frac{1}{K} \leq \frac{R_{\max}(E)}{R_{\max}(E')} \leq K,$
- $R_{\max}(E), R_{\max}(E') \geq M,$
- $R = \max(R_{\max}(E), R_{\max}(E'))$

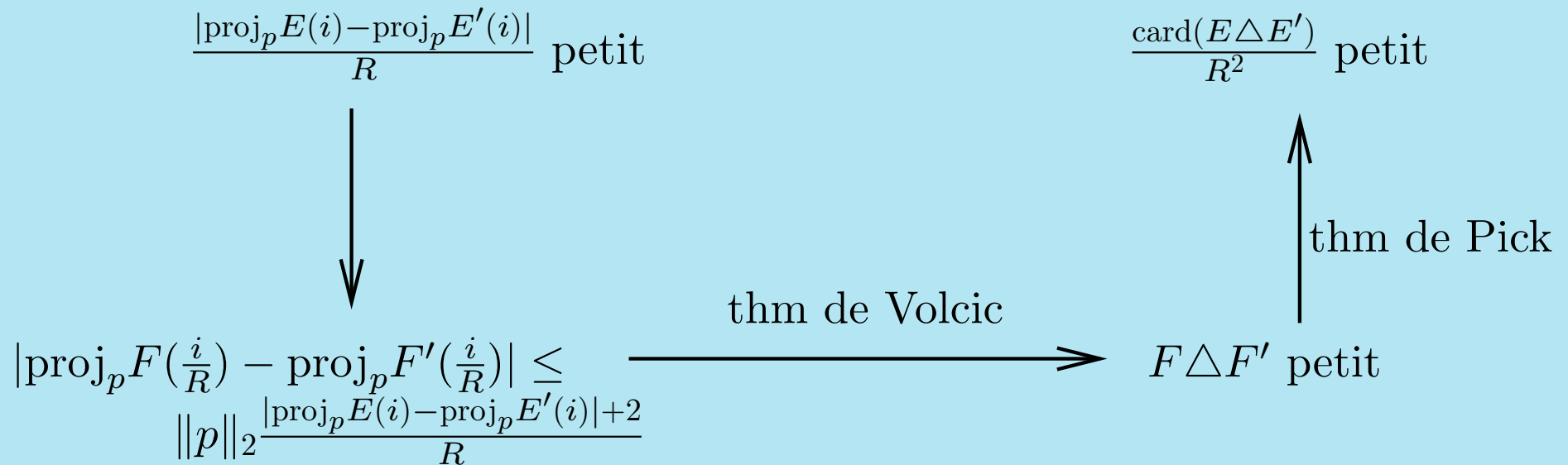
on a :

$$\frac{\max_{k=1\dots 4} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |X_{p_k} E(i) - X_{p_k} E'(i)|}{R^2} < \eta \implies \frac{|E \Delta E'|}{R^2} < \epsilon + \frac{17}{R}$$

Preuve du thm discret de stabilité

Si $E \subset \mathbb{Z}^2$ alors $C_r(E) = \text{conv}\left(\frac{E}{r}\right)$,

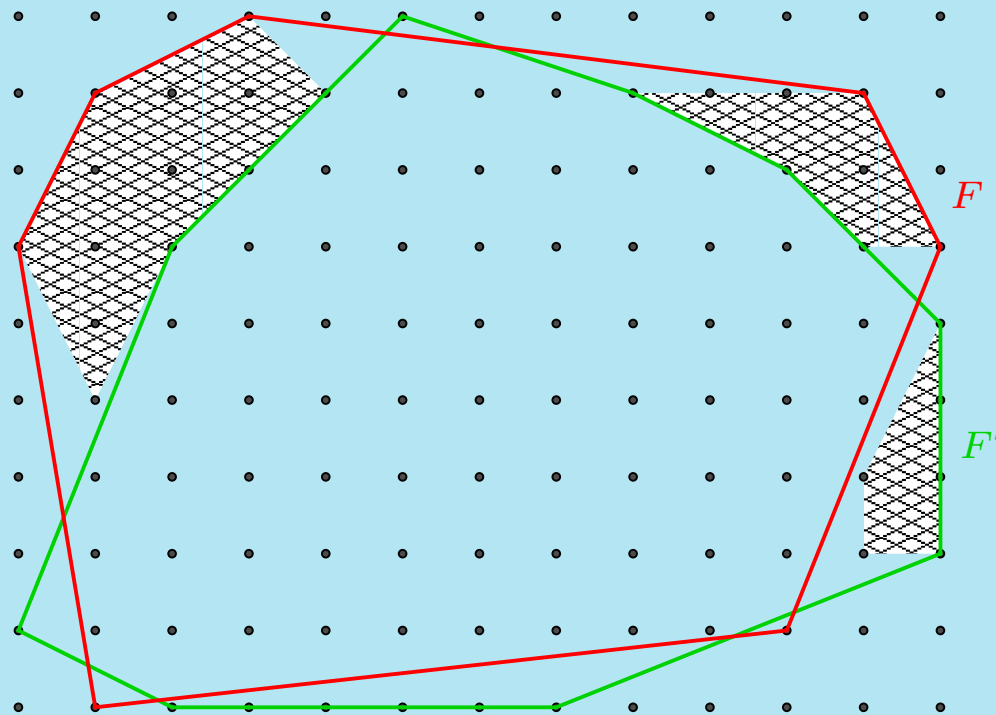
$R_{\max}(E) = \max\{\|\overrightarrow{OM}\| : M \in E\}$. Soient E, E' deux convexes discrets et $F = C_R(E), F' = C_R(E')$ où $R = \max(R_{\max}(E), R_{\max}(E'))$.



Preuve du thm discret de stabilité - 2

Thm [P 1899] : Si P est un polygone à sommets dans \mathbb{Z}^2 , non réduit à un segment alors : $\text{aire}(P) = i + \frac{b}{2} - 1$.

Donc $|P \cap \mathbb{Z}^2| = i + b \leq 2i + b \leq 2(\text{aire}(P) + 1)$.



Stabilité : Problèmes ouverts

- Version quantitative du théorème de Volčič (continu et discret).
- Extension à une classe plus faible que la convexité.

Plan de l'exposé

1. Unicité
2. Stabilité
3. **Algorithme de reconstruction**
4. Convergence

Problèmes algorithmiques

RECEXACT(\mathcal{P}, \mathcal{D})

Donnée : $(d_{i,p})_{(i,p) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{D}}$

Sortie : Une partie E vérifiant la propriété \mathcal{P} telle que :

$$\text{proj}_p E(k) = d_{k,p}$$

RECAPPROCHÉE(\mathcal{P}, \mathcal{D})

Donnée : $(d_{i,p})_{(i,p) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{D}}, (d'_{i,p})_{(i,p) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{D}},$

Sortie : Une partie E vérifiant la propriété \mathcal{P} telle que :

$$d_{k,p} \leq \text{proj}_p E(k) \leq d'_{k,p}$$

Thm [BDeNP 96] :

$\text{RECEXACT}(\text{polyominos HV-convexes}, \{h, v\})$ est polynomial. Meilleure complexité : $O(n^4)$ (CDu99)

Thm [BDa 00] : $\text{RECEXACT}(\text{Q-convexes selon } \mathcal{D}, \mathcal{D})$ est polynomial. Meilleure complexité : $O(n^4 \log(n))$ (BDaK06)

Thm [BDaDe 00] :

$\text{RECAPPROCHÉE}(\text{Q-convexes forts selon } \mathcal{D}, \mathcal{D})$ est polynomial. Meilleure complexité : $O(n^{2|\mathcal{D}|+2})$

Conséquences : Si \mathcal{D} est un ensemble de directions de Gardner-McMullen alors $\text{RECEXACT}(\text{convexes discrets}, \mathcal{D})$ est polynomial.

La complexité de $\text{RECAPPROCHÉE}(\text{convexes discrets}, \mathcal{D})$ est inconnue.

Plan de l'exposé

1. Unicité
2. Stabilité
3. Algorithme de reconstruction
4. **Convergence**

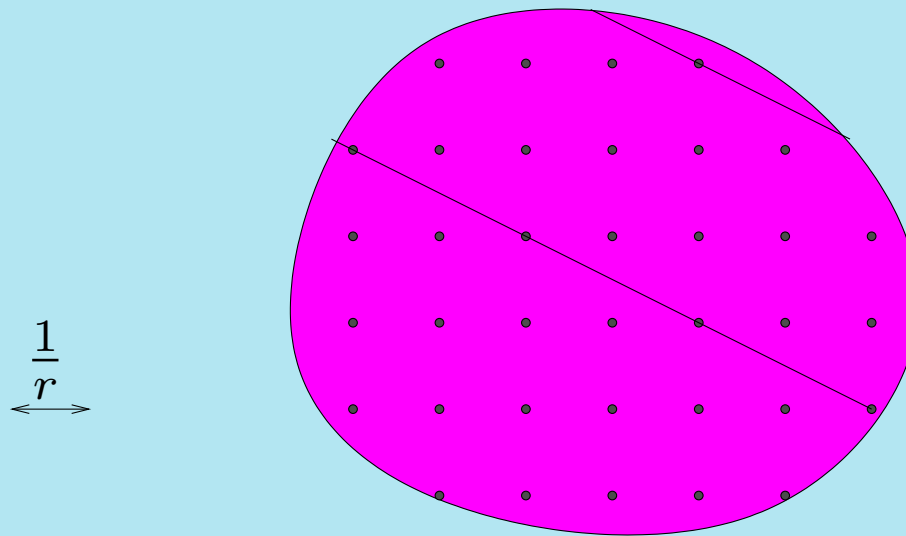
Peut-on reconstruire un corps convexe de \mathbb{R}^2 à n'importe quelle précision, si on connaît ses projections selon des directions de Gardner-McMullen aussi à n'importe quelle précision ?

Les théorèmes d'unicité et de stabilité répondent partiellement à cette question car ils ne donnent pas d'algorithmes.

Solution naturelle : discrétiser et utiliser les algorithmes de la tomographie discrète ?

Approximer \mathbb{R}^2 par $\frac{1}{r}\mathbb{Z}^2$ avec r qui tend vers ∞ .

Si $F \subset \mathbb{R}^2$ alors $D_r(F) = (rF) \cap \mathbb{Z}^2$.



Pour toute direction $p = (a, b)$ avec $\text{pgcd}(a, b) = 1$, si F est un corps convexe alors $E = D_r(F)$ vérifie :

$$\left\lfloor \frac{r \text{proj}_p(F)\left(\frac{i}{r}\right)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\rfloor \leq \text{proj}_p E(i) \leq \left\lceil \frac{r \text{proj}_p(F)\left(\frac{i}{r}\right)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\rceil + 1$$

Thm [BDa 05] : Soit \mathcal{D} un ens de directions rationnelles de Gardner-McMullen, $f : \mathbb{R} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que le support de chaque $f(\cdot, p)$ est borné et pour tout $r \in \mathbb{N}$ il existe E_r qui vérifie :

$$\left\lfloor \frac{r f(\frac{i}{r}, p)}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \right\rfloor \leq \text{proj}_p E_r(i) \leq \left\lceil \frac{r f(\frac{i}{r}, p)}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}} \right\rceil + 1, \quad p \in \mathcal{D}$$

alors il existe un corps convexe F tel que :
 $\text{proj}_p F(x) = f(x, p)$, et

$$\frac{1}{r^2} |E_r \Delta (rF \cap \mathbb{Z}^2)| \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Mais aucun algorithme polynomial résolvant :

Donnée : $(d_{i,p})_{(i,p) \in \mathbb{Z} \times \mathcal{D}}$

Sortie : Une partie E convexe discrète telle que :

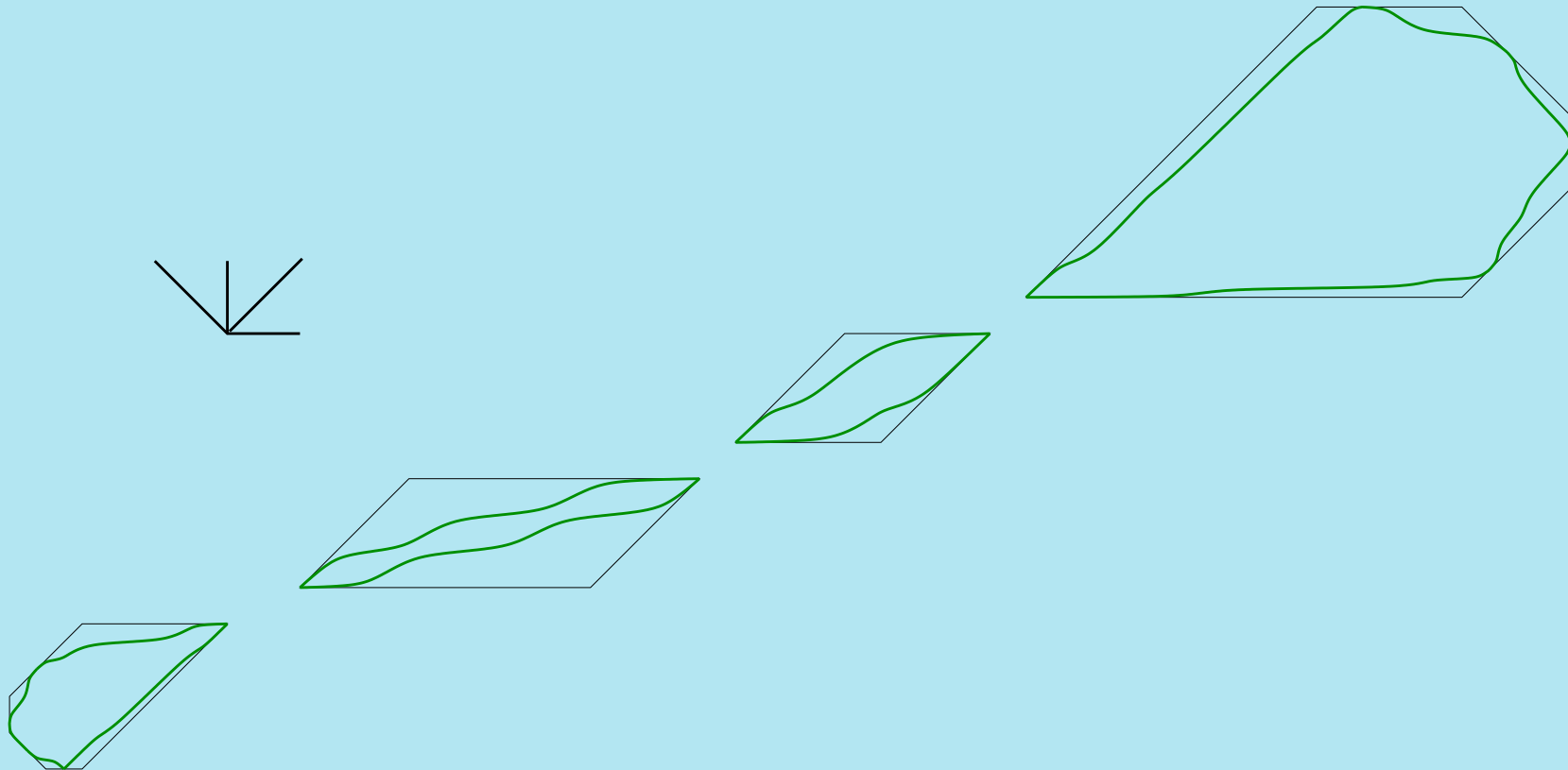
$$d_{k,p} \leq \text{proj}_p E(k) \leq d_{k,p} + 1$$

n'est connu.

La reconstruction d'un corps convexe en utilisant des algorithmes polynomiaux de la tomographie discrète demeure un problème ouvert.

FIN

La Q-convexité selon \mathcal{D} peut être définie sur \mathbb{R}^2 , par les quadrants ou comme clôture des connexes convexes selon \mathcal{D} . (Dans \mathbb{R}^2 il n'y a pas de distinction Q-convexité/Q-convexité forte.)



Un \mathbb{Q} -convexe, non \mathbb{Q} -convexe fort selon $\mathcal{D} = \{(0, 1), (-3, 1), (-3, 2)\}$. Il n'est pas l'intersection d'un connexe convexe selon \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 .

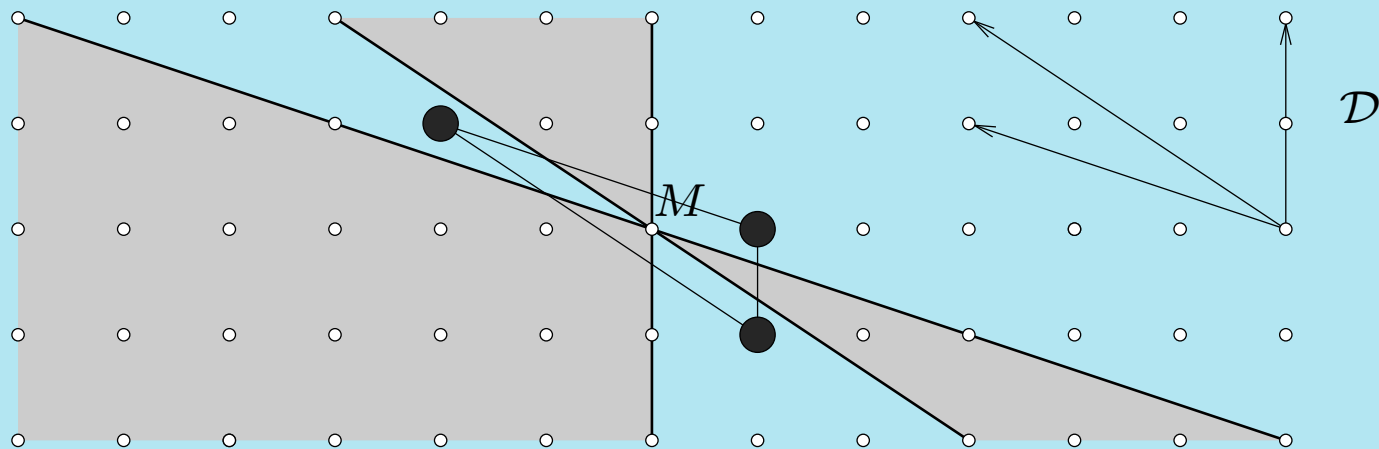
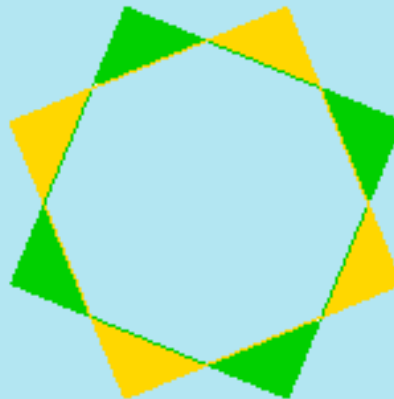


Schéma de la preuve du thm de Gardner-McMullen



- Considérer deux convexes F^+ , F^- ayant les mêmes projections selon \mathcal{D} .
- Partitionner la différence symétrique $(\text{int}(F^+) \setminus F^-) \cup (\text{int}(F^-) \setminus F^+)$ en composantes.
- “Transformer” le polygone formé des barycentres de ces composantes en l’image par une appl. linéaire d’un polygone régulier, avec des diagonales parallèles aux directions de \mathcal{D} .

Additivité des Q-convexes

Conj : Soit $\mathcal{D} = p_1, p_2, p_3, p_4$ un ens de Gardner-McMullen tel que $\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{bmatrix} > 1$. Tout Q-convexe selon $\{p_1, p_3\}$ est additif selon \mathcal{D}