

Axe Médian Discret Hiérarchique pour la construction de Sphere-Tree

Alain Broutta¹David Coeurjolly¹Isabelle Sivignon¹

¹ Université de Lyon CNRS
Laboratoire LIRIS - UMR 5205

Bâtiment NAUTIBUS, 8 boulevard Niels Bohr
69622 Villeurbanne Cedex, France
alain.broutta@liris.cnrs.fr

Résumé

Dans le domaine de la géométrie discrète, la Transformée en Distance et l'Extraction de l'Axe Médian sont des outils couramment utilisés pour l'analyse et la reconnaissance de formes, notamment pour la caractérisation par squelettes. D'autre part, les représentations hiérarchiques permettent également une analyse performante à différents niveaux de détail. Dans cet article, nous présentons un Axe Médian Discret Hiérarchique qui relie ces diverses méthodes, en se basant sur une représentation pyramidale de l'objet à plusieurs niveaux de résolution. L'Axe Médian est extrait à chaque étape et il convient alors de lier les sphères de chaque niveau pour obtenir une structure hiérarchique, nommée sphere-tree. Cette structure trouve de nombreuses applications en modélisation, en analyse de formes, ou dans les environnements interactifs (détection de collisions).

Mots Clef

Axe médian discret, hiérarchies de volumes englobants, pyramides régulières, analyse de formes.

Abstract

In discrete geometry, the Distance Transformation and the Medial Axis Extraction are classical tools for shape analysis and recognition, particularly for skeletal representations. On the other hand, hierarchical representations also enable efficient analysis at different levels of detail. In this paper, we present a Hierarchical Discrete Medial Axis which connects these various methods. It is based on a pyramidal representation of the object at different resolution levels. The Medial Axis is extracted at each step and spheres at consecutive levels are linked in order to get a hierarchical structure, called sphere-tree. This structure is currently used in modeling, shape analysis, or in interactive environments (collision detection).

Keywords

Discrete medial axis, bounding volumes hierarchies, regular pyramids, shape analysis.

1 Introduction

En synthèse d'images ou en analyse de formes, l'Axe Médian et les représentations hiérarchiques sont des outils couramment utilisés dans de nombreux domaines comme la reconnaissance de formes, ou la modélisation.

L'Axe Médian est un descripteur de formes défini par le lieu des centres de sphères incluses dans l'objet. Il peut alors être vu comme son squelette, et a de nombreuses applications [2]. En géométrie discrète, il a pour avantage de pouvoir être caractérisé de manière efficace à partir d'une image de distance de l'objet, tout en garantissant sa réversibilité : à partir des sphères qui le composent, la forme originale peut être exactement reconstruite [13]. Cependant, les Axes Médiens peuvent être instables du fait de leur sensibilité aux détails de la forme étudiée. Ainsi de nombreuses méthodes de réduction ont été proposées en géométrie algorithmique [15, 16, 25, 26]. Dans le domaine discret, les méthodes de simplification de l'Axe Médian se basent sur des représentations à divers niveaux de résolution. Les axes médians ainsi produits sont classés dans un modèle hiérarchique [7, 8]. Toutefois, ces procédés reposent essentiellement sur des principes de filtrage via des amincissements homotopiques [23], et ne garantissent pas la réversibilité du modèle. Notre étude s'orientera alors vers d'autres méthodes classiques de réduction d'ensemble de sphères, par des représentations hiérarchiques de l'objet selon des volumes englobants.

En effet, en géométrie algorithmique, les représentations hiérarchiques sont des outils couramment utilisés pour la synthèse d'images, les représentations multi-échelle ou dans les environnements interactifs. Elles permettent par exemple de localiser rapidement le lieu de collision entre deux objets. Les Hiérarchies de Volumes Englobants consistent en une couverture de l'objet avec un nombre croissant de volumes primitifs (tels que des sphères [14, 21, 24], des boîtes englobantes alignées selon les axes [27] ou orientées [18],...) à différents niveaux, en s'assurant que toute partie recouverte par un noeud l'est également par le volume parent. Ainsi la détection de collision entre deux modèles hiérarchiques consiste à vérifier récursivement les

chevauchements entre paires de primitives. Le choix de la primitive oriente les propriétés des différentes hiérarchies. Les sphères sont intéressantes pour la détection d'interférences [18]. Cependant, comme elles s'adaptent difficilement à la géométrie de l'objet, un arbre de sphères (ou *sphere-tree*) doit être construit efficacement pour réduire l'erreur entre l'objet et l'ensemble de sphères associé.

En géométrie algorithmique, les méthodes les plus efficaces se basent sur l'utilisation d'une approximation de l'Axe Médian de l'objet, réduit itérativement par diverses heuristiques d'optimisation [9, 10, 19]. L'erreur est alors estimée par une distance de Hausdorff approximée.

Dans cet article, nous présentons une méthode originale pour la construction de *sphere-tree* pour les objets discrets (schématisée sur la figure 1) : l'ensemble de sphères à chaque niveau est obtenu par une extraction de l'Axe Médian pour différentes résolutions dans le cadre d'une pyramide régulière. La section 2 présente ces étapes préliminaires. L'arbre de sphères est finalisé par la liaison entre les sphères de niveaux consécutifs. Cette méthode peut être soit définie pour un modèle réversible, utilisable en analyse de formes (Sections 3.1), soit être efficacement adaptée dans le cadre des environnements interactifs (Section 3.2). Les expérimentations en section 4 montrent également que cette dernière étape réduit l'erreur engendrée. Finalement, nous obtenons un algorithme générique pour le calcul d'un *sphere-tree* en d dimensions, en distance euclidienne au carré et modèle pyramidal inclusif, le tout en temps linéaire. En outre, l'approche discrète a comme avantage supplémentaire de permettre le calcul exact de l'erreur, grâce à une distance de Hamming (différence géométrique).

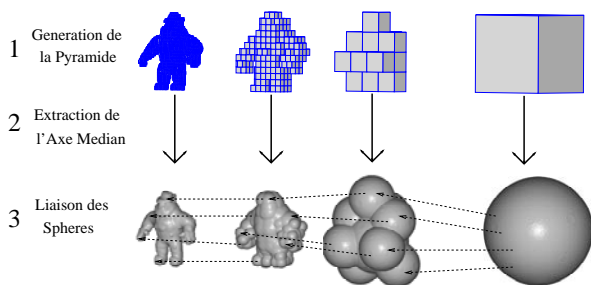


FIG. 1 – Les étapes principales de la construction du *sphere-tree*.

2 Préliminaires

2.1 Modèle Pyramidal

La structure pyramidale est souvent employée pour les problèmes d'analyse de formes [12, 20]. En dimension 2, une pyramide \mathcal{P} de profondeur $N + 1$ peut être définie par un ensemble d'images $2D$ $\{\mathcal{F}_0, \dots, \mathcal{F}_N\}$. Sa construction se fait de bas en haut : \mathcal{F}_N est l'image de départ, les niveaux supérieurs sont ses représentations à des niveaux de résolutions inférieurs dans un procédé de type quad-tree : la taille

d'un pixel à chaque niveau est 4 fois plus grande qu'au niveau suivant. La coloration d'un pixel dépend alors des 4 pixels qu'il contient et se calcule par une fonction de transfert (cf Figure 2).

On peut généraliser ce procédé à toute dimension d avec un facteur entier f représentant l'expansion de la taille des voxels. En d'autres termes, un voxel v' au niveau L contient f^d voxels $\{v_1, \dots, v_{f^d}\}$ au niveau L . Ainsi, la fonction de transfert \mathcal{M} (pour "modèle") se définit ainsi :

Définition : \mathcal{M} est un modèle entre \mathcal{F}_L et \mathcal{F}_{L-1} si :
 $\forall v', \exists \{v_1, \dots, v_{f^d}\} \mathcal{F}_{L-1}(v') = \mathcal{M}(\mathcal{F}_L(v_1), \dots, \mathcal{F}_L(v_{f^d}))$

On note alors $\mathcal{F}_{L-1} = \mathcal{M}(\mathcal{F}_L)$. Pour une approche hiérarchique en volumes englobants, l'objet d'origine devrait être complètement couvert à chaque niveau de la hiérarchie. Aussi, nous utilisons un modèle basé sur la fonction logique "OU" : chaque voxel au niveau $L - 1$ appartient à \mathcal{F}_{L-1} dès que l'un des f^d voxels qu'il contient appartient à \mathcal{F}_L . La figure 2 présente un exemple en dimension 2.

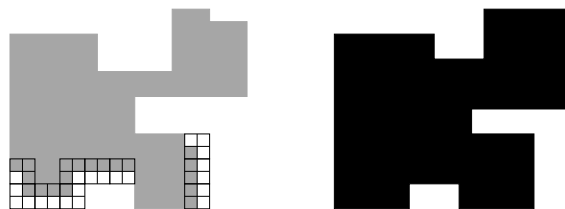


FIG. 2 – Niveaux Consecutifs sur une pyramide régulière basée sur le modèle "OU".

2.2 Axe Médian et Diagramme de Puissance Discrets

Axe Médian Discret. L'Axe Médian est un descripteur de forme présenté par Blum en 1967 [5] pour simuler la propagation d'un front d'onde sur une forme, à partir de son contour (*prairie fire model*). Il est défini par (1) l'ensemble des points équidistants aux deux points du contour les plus proches, ou (2) l'ensemble des centres des boules maximales incluses dans l'objet (une boule étant maximale si elle n'est pas incluse dans toute autre boule incluse dans l'objet) [22].

Pour les formes binaires, l'Axe Médian Discret (AMD) peut être efficacement extrait à partir d'une Transformée en Distance (DT), qui consiste en un étiquetage de chaque voxel par sa distance avec le voxel le plus proche dans le complément (le fond). Autrement dit, la valeur associée à un voxel v correspond au rayon de la plus grande boule discrète centrée en v incluse dans l'objet. A partir de la transformée en distance euclidienne, on peut extraire l'ensemble des boules maximales grâce à des algorithmes en temps linéaire [13].

Diagramme de Puissance Discret. En géométrie algorithmique, le diagramme de puissance (*diagramme de Laguerre*) est une généralisation du diagramme de Voronoi

[4]. Cet outil est souvent utilisé pour le calcul d'interaction de boules et pour la reconstruction de surfaces [1, 3, 6]. Soit un ensemble de sites $\mathcal{S} = \{s_i\}$ respectivement associés à des rayons r_i . La puissance $\sigma_i(p)$ d'un point p selon le site s_i est défini par :

$$\sigma_i(p) = d(p, s_i) - r_i \quad (1)$$

Si $\sigma_i(p) < 0$, p appartient à la boule centrée en s_i et de rayon r_i . Le diagramme de puissance est basé sur la métrique induite par σ et décompose l'objet en cellules $\mathcal{C} = \{c_i\}$ telles que :

$$c_i = \{p \in \mathbb{R}^d : \sigma_i(p) < \sigma_j(p), i \neq j\} \quad (2)$$

En géométrie discrète, l'étiquetage se définit uniquement sur les points de la grille discrète. Plus précisément, on assigne à chaque voxel l'index de la cellule à laquelle il appartient. Dans [13], les auteurs ont mis en évidence les liens entre les boules de l'axe médian et les cellules du diagramme de puissance.

3 Construction du sphere-tree

L'ensemble des sphères maximales pouvant être extrait à chaque niveau de la pyramide, il reste à relier les sphères des niveaux consécutifs pour compléter la construction du sphere-tree. La section suivante présente une construction d'un graphe par un simple procédé de liaison, puis sa réduction en différents sphere-trees.

3.1 Diagramme de puissance et treillis de sphères

Pour lier une sphère s au niveau N et une sphère t au niveau $N - 1$, un simple test d'intersection suffit à exprimer la couverture d'une partie de s par t . Notons $t \rightarrow s$ un arc entre t et s :

$$t \rightarrow s \Leftrightarrow t \in AM_{N-1} \wedge s \in AM_N \wedge t \cap s \neq \emptyset \quad (3)$$

Ces arcs sont toujours orientés du niveau supérieur à l'inférieur, le graphe défini est donc un treillis, dont les sommets sont les sphères des différents niveaux. Sa construction ne nécessite que de tester les intersections entre les paires (s, t) des niveaux consécutifs, le temps de calcul est donc en $O(n^2)$ pour n sphères au niveau d'origine. Cependant, pour une structure efficace, chaque partie de l'objet n'a pas besoin d'être recouverte par beaucoup de sphères. Ainsi, ce treillis est trop exhaustif pour une simplification efficace en arbre. Nous pouvons réduire ce treillis complet en utilisant le diagramme de puissance discret défini en section 2.2. En effet, chaque voxel est étiqueté par la sphère qui le recouvre au mieux. Soit v un voxel de \mathcal{F}_N au niveau N . Comme la représentation \mathcal{F}_{N-1} au niveau $N - 1$ est construite par un modèle \mathcal{M} , v est incluse dans un voxel v' . On note $v' = \mathcal{R}(v)$. Les modèles inclusifs, comme le modèle en "OU" défini en Section 2.1, assurent que $\mathcal{F}_{N-1}(v') = 1$. On peut alors comparer les diagrammes \mathcal{C}_N (sur \mathcal{F}_N) et

\mathcal{C}_{N-1} (sur \mathcal{F}_{N-1}). Si v appartient à la cellule $\mathcal{C}_N(s_i)$ et v' à $\mathcal{C}_{N-1}(t_j)$, la sphère s_i (au niveau N) couvre une partie de \mathcal{F}_N incluant le voxel v , et la représentation de cette partie dans \mathcal{F}_{N-1} est couverte par t_j . Ainsi, t_j couvre une partie de s_i , et nous l'exprimons par $t_j \rightarrow s_i$.

Définition : t est une sphère parente pour s ($t \rightarrow s$) dans le treillis si : $\exists v \in \mathcal{F}_N \setminus (v \in \mathcal{C}_N(s) \wedge \mathcal{R}(v) \in \mathcal{C}_{N-1}(t))$

Par la superposition de \mathcal{C}_N et \mathcal{C}_{N-1} , nous pouvons détecter toute relation par un seul passage sur chaque voxel au niveau N (cf Figure 3). L'algorithme 1 est générique pour les objets en dimension d et pour tout modèle pyramidal inclusif. Le procédé de construction du treillis est en temps linéaire selon le nombre de voxels dans \mathcal{F}_N [11].

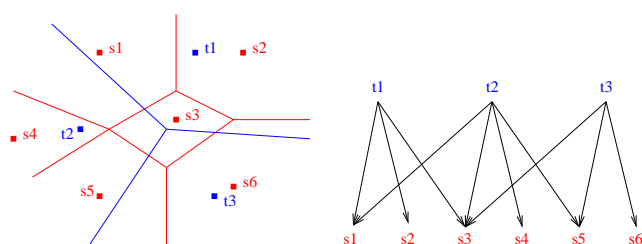


FIG. 3 – Superposition de \mathcal{C}_N et \mathcal{C}_{N-1} et la partie du treillis associée aux niveaux \mathcal{F}_{N-1} et \mathcal{F}_N . Par exemple, la cellule s_1 de \mathcal{C}_N est couverte à la fois par t_1 et t_2 dans \mathcal{C}_{N-1} , nous avons ainsi $t_1 \rightarrow s_1, t_2 \rightarrow s_1$.

Algorithm 1 Construction de Treillis de Sphères

```

1: Entrées :  $\mathcal{F}_N$  l'objet de départ
2:    $\mathcal{AM}_N$  son Axe Médian Discret
3:    $\mathcal{C}_N$  son Diagramme de Puissance Discret
4: Sortie :  $\mathcal{T} = \{\mathcal{AM}_0, \dots, \mathcal{AM}_N\}$  le Sphere-tree
5: while  $|\mathcal{AM}_N| > 1$  do
6:    $\mathcal{F}_{N-1} \leftarrow \mathcal{M}(\mathcal{F}_N)$  {with  $\mathcal{M}$  le modèle pyramidal}
7:   Extraction de  $\mathcal{AM}_{N-1}$  et de  $\mathcal{C}_{N-1}$ 
8:   for all  $v$  voxel tel que  $v \in \mathcal{F}_N$  do
9:      $v' \leftarrow \mathcal{S}(v)$ 
10:    if  $(v \in \mathcal{C}_N(s))$  et  $(v' \in \mathcal{C}_{N-1}(t))$  then
11:      Liaison des sphères  $t \in \mathcal{AM}_{N-1}$  et  $s \in \mathcal{AM}_N$ 
12:    end if
13:  end for
14:   $N \leftarrow N - 1$ 
15: end while

```

3.2 Sphere-Trees Réversibles et Etendus

Généralement, dans une hiérarchie de volumes englobants, chaque noeud doit couvrir les parties de l'objet couvertes par ses fils, et non la totalité du volume qu'il représente. Ici, nos sphères résultent d'une extraction d'AMD, nous assurant qu'elles couvrent une partie de l'objet sans générer d'erreur. Aussi, chaque sphere doit être complètement re-

couverte par une sphère parente, mais cette condition implique une expansion de cette dernière, soit une modification de la représentation. C'est pourquoi deux méthodes distinctes sont présentées, l'une respectant la réversibilité de la pyramide, l'autre la propriété des hiérarchies.

Sphere-Tree Réversible. Le sphere-tree est généré à partir du trellis par l'extraction d'un arbre couvrant, en conservant pour chaque noeud la sphère parente qui le recouvre au mieux. En effet, on peut facilement déterminer si une sphère $s_1(c_{s_1}, r_{s_1})$ est couverte par une autre sphère $s_2(c_{s_2}, r_{s_2})$ en comparant le rayon r_{s_2} avec la distance centre-à-centre $d(c_{s_1}, c_{s_2})$ à laquelle on ajoute r_{s_1} :

$$s_1 \subseteq s_2 \Leftrightarrow d(c_{s_1}, c_{s_2}) + r_{s_1} - r_{s_2} \leq 0 \quad (4)$$

Cependant ce rapport n'est plus suffisant si l'on veut savoir si la sphère est couverte par plus d'une sphère. Reformulons la relation de couverture en utilisant la fonction σ définie pour le diagramme de puissance (Section 2.2). Soit $s(c_s, r_s)$ une sphère au niveau N et $t(c_t, r_t)$ au niveau $N - 1$, la fonction de couverture $\sigma'_t(s)$ est donnée par :

$$\sigma'_t(s) = d(\mathcal{S}(c_s), c_t) - r_t + r_s$$

Si $\sigma'_t(s) \leq 0$ alors s est entièrement recouverte par t . Plus précisément, l'intersection entre s et t augmente lorsque $\sigma'_t(s)$ diminue. Ainsi, pour une sphère fille s avec p parents t_1, \dots, t_p , on choisit le parent t_j où $\sigma'_{t_j}(s)$ est minimal, pour obtenir la meilleure couverture possible pour s . En réalité, le meilleur parent peut être immédiatement déterminé : pour une sphère s_i de rayon r_{s_i} on cherche le minimum de $d(\mathcal{S}(c_{s_i}), c_{t_j}) - r_{t_j}$ pour chaque parent t_j . Selon le calcul du diagramme de puissance \mathcal{C}_{N-1} , cela correspond à la fonction $\sigma_{t_j}(\mathcal{S}(c_{s_i}))$ au point $\mathcal{S}(c_{s_i})$ et pour le site t_j . Le minimum de σ est détecté à t_j si le point $\mathcal{S}(c_{s_i})$ est inclus dans la cellule associée au centre c_{s_i} au niveau $N - 1$. Si $\mathcal{S}(c_{s_i})$ appartient à la cellule associée à la sphère t_j alors t_j est la sphère parente de s_i . La figure 4 présente ce calcul sur le même exemple que la figure 3.

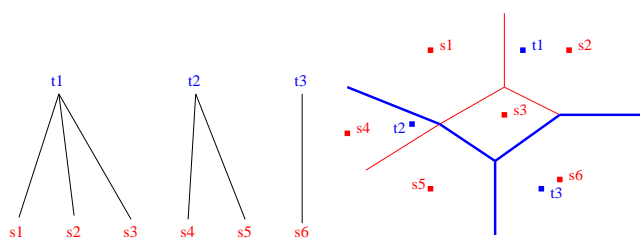


FIG. 4 – Réduction du trellis précédent. On peut également créer le diagramme de recouvrement, et étendant chaque cellule dans \mathcal{C}_{N-1} comme l'union des cellules filles.

Sphere-Tree Etendu. Afin de respecter la propriété d'inclusion, on pourrait remplacer chaque sphère parente par la sphère minimale qui recouvre l'ensemble de ses fils. Cependant, la caractérisation d'une telle sphère ne

se calcule pas de manière efficace car cela se rapporte au problème d'une boule minimale englobante d'un ensemble de points en dimension d [17]. Pour maintenir autant que possible la réversibilité par rapport à l'objet original, nous proposons une approche originale, qui consiste à une extension des rayons des sphères parentes.

Théorème : Soit une sphère t et son ensemble de filles $\{s_i\}$. t est une sphère minimale englobante centrée en c_t pour ses filles si son rayon r_t est étendu par $r'_t = \sigma'_t(s_{max})$, où s_{max} est la sphère fille où la puissance de recouvrement σ'_t est maximale.

Preuve : Pour deux sphères s, t , nous savons par définition que t recouvre entièrement s si $\sigma'_t(s) \leq 0$. De plus si $\sigma'_t(s) = 0$ alors nous avons $d(\mathcal{S}(c_s), c_t) + r_s = r_t$, la sphère t est donc la sphère minimale englobante pour s , centrée en c_t . Soit r'_t la quantité à ajouter à r_t pour obtenir une couverture de s par t . On a alors :

$$d(\mathcal{S}(c_s), c_t) - (r_t + r'_t) + r_s = 0 \Leftrightarrow r'_t = \sigma'_t(s)$$

Ainsi $\sigma'_t(s)$ définit cette quantité d'extension. A présent, pour une sphère parente t_j , soit la fille s_{max} où $\sigma'_{t_j}(s_{max})$ est maximale. Ajouter cette quantité au rayon de t_j revient à retrancher $\sigma'_{t_j}(s_{max})$ à toutes les $\sigma'_t(i)$ et nous obtenons ainsi $\sigma'_t(i) \leq 0$ pour toutes les filles s_i et en particulier $\sigma'_{t_j}(s_{max}) = 0$. Au final, t devient la sphère minimale englobante de ses filles, en gardant son centre c_t . □

L'algorithme 2 ajoute ce processus d'extension au calcul du sphere-tree. Son exécution reste en temps linéaire [11].

Algorithm 2 Génération du Sphere-Tree Etendu

```

1: Entrées :  $\mathcal{F}_N$  l'objet de départ
2:    $\mathcal{AM}_N$  son Axe Médian Discret
3:    $\mathcal{C}_N$  son Diagramme de Puissance
4: Sortie :  $\mathcal{T} = \{\mathcal{AM}_0, \dots, \mathcal{AM}_N\}$  le Sphere-tree
5: while  $|\mathcal{AM}_N| > 1$  do
6:    $\mathcal{F}_{N-1} \leftarrow \mathcal{M}(\mathcal{F}_N)$  {avec  $\mathcal{M}$  le modèle Pyramidal}
7:   Extraction de  $\mathcal{AM}_{N-1}$  et de  $\mathcal{C}_{N-1}$ 
8:   for chaque sphère  $s : (c(s), r(s)) \in \mathcal{AM}_N$  do
9:     if  $\mathcal{S}(c(s)) \in \mathcal{C}_{N-1}(t)$  then
10:       $t$  est une sphère parente pour  $s$ 
11:     end if
12:   end for
13:   for chaque sphère  $t : (c(t), r(t)) \in \mathcal{AM}_{N-1}$  do
14:     if  $t$  n'a pas de fils then
15:        $\mathcal{AM}_{N-1} \leftarrow \mathcal{AM}_{N-1} - \{t\}$ 
16:     else
17:        $r' \leftarrow \max(\sigma'_t(s))$  {pour toute  $s$  fille de  $t$ }
18:        $r(t) \leftarrow r(t) + r'$ 
19:     end if
20:   end for
21:    $\mathcal{F}_{N-1} \leftarrow \cup_t \{t \in \mathcal{AM}_{N-1}\}$ 
22:    $N \leftarrow N - 1$ 
23: end while

```

A partir de cet algorithme, nous obtenons un arbre de sphères qui respecte la condition de couverture. Néanmoins, les sphères ont été modifiées, bien qu'elles étaient définies au préalable pour garantir la distribution de l'erreur le long de l'objet. Ainsi le processus d'extension des rayons peut perturber la réversibilité du modèle à chaque niveau. D'un autre côté, lorsque la valeur $\sigma'_t(s_{max})$ est négative, le rayon des sphères parentes décroît, ce qui génère une amélioration de la finesse de la représentation par rapport à l'objet d'origine. De plus, l'arbre de sphères est simplifié par la suppression des sphères n'ayant pas de descendance. La profondeur de l'arbre peut s'en retrouver réduite. La section suivante illustre ces quelques observations par des expérimentations. Enfin, pour réduire l'erreur par rapport à l'objet de départ, on peut également évaluer l'extension du rayon non plus sur les filles d'une sphères, mais directement sur l'ensemble des feuilles associés (*i.e.* les sphères de l'objet original).

4 Expérimentations

Cette section présente une comparaison entre les algorithmes réversible et étendu, avec des tests sur plusieurs objets discrets en 3D, au formats `.vol` ou `.longvol`, définis dans la librairie `simplevol`. La Transformée en Distance, l'extraction de l'AMD Réduit et le diagramme de Puissance Discret sont calculés grâce au toolkit MAEVA¹.

La figure 5 expose les différences entre les deux algorithmes sur l'objet `A1.100.vol`². Le graphe de gauche présente le nombre de sphères à chaque niveau, celui de droite le pourcentage de l'erreur de chaque représentation par rapport à l'objet original. Cette erreur est caractérisée par une distance de Hamming, efficacement calculable dans le cas discret. Comme les objets ont des tailles différentes en nombre de voxels, nous préférons représenter cette erreur par un pourcentage représentant le volume d'erreur qui a été rajouté.

4.1 Algorithme Réversible

Comme nous l'avons vu en section 2.1, la représentation \mathcal{F}_{L-1} est f^d fois plus petite que \mathcal{F}_L en nombre de voxels, comme le montre la figure 6. De même, l'AMD associé contient moins de sphères. Cependant, la distance est calculée entre deux centres de voxels dans une approche discrète (ici nous utilisons une distance euclidienne au carré), mais cette distance doit dépendre aussi de la taille des voxels à chaque niveau de résolution. C'est pourquoi nous ramenons les sphères au niveau de résolution le plus fin par un procédé de reconstruction. De plus, aux niveaux supérieurs, la variété des rayons devient de plus en plus faible. L'intervalle reste également très étroit après la reconstruction puisque chaque rayon est augmenté selon le même ratio à un niveau donné. Ainsi, l'arbre de sphères ressemble à un octree puisque la plupart des sphères ont des rayons identiques.

¹Librairies disponibles sur <http://gforge.liris.cnrs.fr/>
²<http://www.tc18.org/>

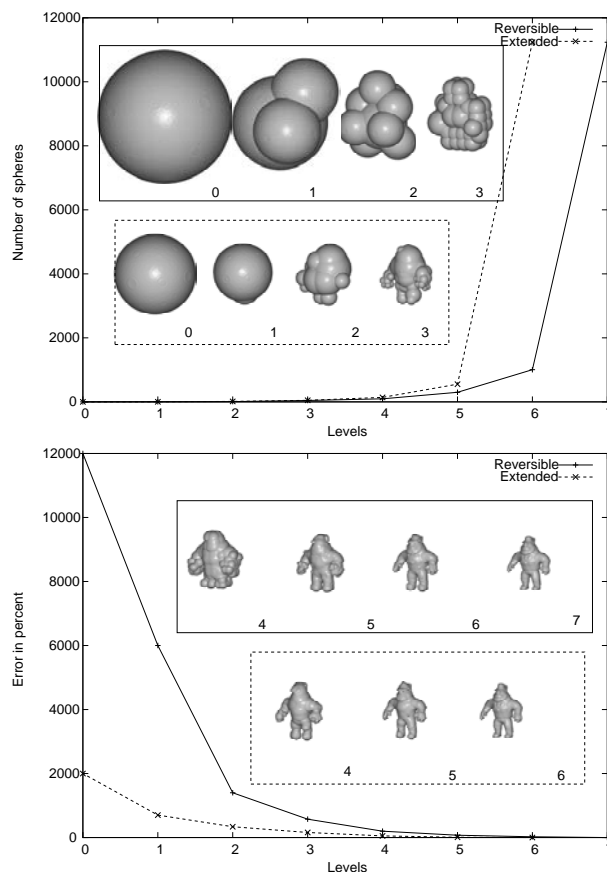


FIG. 5 – Expérimentations sur `A1.100.vol`. Les graphes de gauche montrent la diminution du nombre de sphères, plus rapide dans le cas étendu, et la profondeur de la hiérarchie est également réduite. L'extension dynamique des rayons produit également une réduction de l'erreur, comme on le constate sur les graphes de droite.

Néanmoins, le rapport de reconstruction aux plus hauts niveaux est très important, et les sphères surestiment la géométrie de l'objet.

4.2 Algorithme Étendu

Les expérimentations pour le sphere-tree étendu montrent que la reconstruction dynamique avant l'extension simplifie les niveaux supérieurs (cf Figure 6). Comme nous supprimons les sphères sans filles, la réduction du nombre de sphères est plus rapide que dans la méthode réversible. De plus, dans l'Algorithme 2 nous proposons une reconstruction des niveaux supérieurs juste après l'extension. Les tests montrent que ce procédé atténue l'augmentation de l'erreur. Pour réduire l'incidence du procédé de reconstruction final, nous proposons d'affiner les sphères par $\sigma'_t(s_{max})$. En effet, comme la reconstruction a tendance à produire des sphères qui surestiment l'objet, cette dernière extension réduit l'erreur une dernière fois.

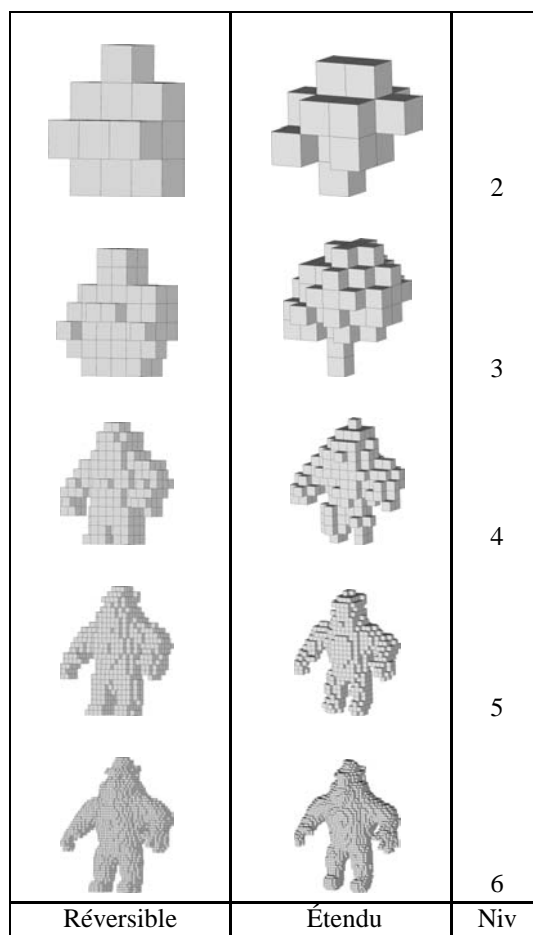


FIG. 6 – Comparaison entre la pyramide réversible et sa reconstruction dynamique dans la version étendue.

5 Conclusion et Perspectives

Dans cet article, nous avons présenté une méthode originale pour la génération d'un sphere-tree en géométrie discrète. Sa construction est basée sur l'Axe Médian Discret de l'objet, comme les meilleurs algorithmes en géométrie algorithmique [9, 10, 19], mais nous bénéficions également d'une extraction exacte et efficace d'un Axe Médian réversible. Ainsi nous pouvons produire des ensembles réversibles de sphères à partir de chaque niveau de la pyramide régulière. La liaison des différents niveaux est résolue en utilisant les diverses propriétés du diagramme de puissance. Pour assurer la condition de couverture, nous proposons également une méthode rapide pour obtenir les sphères englobantes d'ensembles de noeud, par des extensions de rayon. De plus, en géométrie discrète nous pouvons mesurer de manière exacte l'erreur en calculant la distance de Hamming, au lieu d'approximer une distance de Hausdorff. Les expérimentations montrent que dans le cas réversible l'erreur augmente quand on la rapporte à la résolution d'origine. Cependant, l'algorithme d'extension résout ce problème et réduit cette augmentation, du fait de la construction dynamique de la hiérarchie.

Bien que la structure de sphere-tree soit au départ orientée pour des problèmes d'interférences dans les environnements interactifs, nous pensons que l'Axe Médian Hiérarchique peut également avoir des utilités dans de nombreux autres domaines, comme la reconnaissance de formes ou les mesures de similarité. En effet, la représentation multi-échelles peut permettre d'établir des comparaisons géométriques entre deux objets à des niveaux croissants de résolutions. D'un autre côté, le diagramme de puissance, qui définit les interactions entre les sphères, peut également déterminer les adjacences à un niveau donné, et donc la topologie générale de l'ensemble de sphères. Le modèle permettrait donc de caractériser efficacement l'évolution de la topologie de l'objet à chaque étape.

Les méthodes présentées sont génériques et peuvent être utilisées en dimension d ainsi que pour n'importe quel modèle pyramidal inclusif. Par la suite nous pourrions étendre ces méthodes pour des modèles génériques. Nous pouvons également imaginer d'autres heuristiques pour optimiser l'arbre de sphères, par exemple en remplaçant le traitement d'extension par d'autres calculs de sphères minimales englobantes. Néanmoins, les travaux futurs devraient être orientés sur le maintien de la topologie de l'objet, en utilisant par exemple des pyramides adaptatives, ou des modèles morphologiques, pour réduire l'erreur induite au départ par le modèle réversible.

Références

- [1] N. Amenta, S. Choi, and R. Krishna Kolluri. The power crust, unions of balls, and the medial axis transform. *Comput. Geom.*, 19(2-3) :127–153, 2001.
- [2] D. Attali, J. D. Boissonnat, and H. Edelsbrunner. Stability and computation of the medial axis – a state-of-the-art report. In *Moller, T., Hamann, B., and Russell, B., editors, Mathematical Foundations of Scientific Visualization, Computer Graphics, and Massive Data Exploration*, 2004.
- [3] D. Attali and H. Edelsbrunner. Inclusion-exclusion formulas from independent complexes. *Discrete & Computational Geometry*, 37(1) :59–77, 2007.
- [4] F. Aurenhammer. Power diagrams : Properties, algorithms, and applications. *SIAM Journal on Computing*, 16(1) :78–96, February 1987.
- [5] H. Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. In W. Whaten-Dunn, editor, *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, pages 362–380. MIT Press, Cambridge, MA, 1967.
- [6] J. D. Boissonnat, A. Cerezo, O. Devillers, J. Duquesne, and M. Yvinec. An algorithm for constructing the convex hull of a set of spheres in dimension d . *CGTA : Computational Geometry : Theory and Applications*, 6, 1996.
- [7] G. Borgefors, G. Ramella, and G. Sanniti di Baja. Hierarchical decomposition of multiscale skele-

- tons. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 23(11) :1296–1312, 2001.
- [8] G. Borgefors, G. Ramella, and G. Sanniti di Baja. Shape and topology preserving multi-valued image pyramids for multi-resolution skeletonization. *Pattern Recognition Letters*, 22(6/7) :741–751, 2001.
- [9] G. Bradshaw and C. O’Sullivan. Sphere-tree construction using dynamic medial-axis approximation. In Stephen N. Spencer, editor, *Proceedings of the 2002 ACM SIGGRAPH Symposium on Computer Animation (SCA-02)*, pages 33–40, New York, July 21–22 2002. ACM Press.
- [10] G. Bradshaw and C. O’Sullivan. Adaptive medial-axis approximation for sphere-tree construction. *ACM Transactions on Graphics*, 23(1) :1–26, January 2004.
- [11] A. Broutta, D. Coeurjolly, and I. Sivignon. Hierarchical discrete medial axis for sphere-tree construction. In *P. Wiederhold and R.P. Barneva (Eds.) : IWCIA 2009 LNCS 5852, Springer, Heidelberg*, pages 56–67, 2009.
- [12] P. Cignoni, E. Puppo, and R. Scopigno. Multiresolution representation and visualization of volume data. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 3(4) :352–369, October 1997.
- [13] D. Coeurjolly and A. Montanvert. Optimal separable algorithms to compute the reverse euclidean distance transformation and discrete medial axis in arbitrary dimension. *IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, VOL. 29, NO. 3, MARCH 2007*, aug 22 2007.
- [14] C. Dingliana. Real-time collision detection and response using sphere-trees. Technical report, March 02 1999.
- [15] M. Foskey, M. C. Lin, and D. Manocha. Efficient computation of a simplified medial axis. In *Symposium on Solid Modeling and Applications*, pages 96–107. ACM, 2003.
- [16] J. Giesen, B. Miklos, M. Pauly, and C. Wormser. The scale axis transform. In *Symposium on Computational Geometry*, pages 106–115. ACM, 2009.
- [17] J. E. Goodman and J. O’Rourke, editors. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, 1997.
- [18] S. Gottschalk, M. C. Lin, and D. Manocha. OBB-Tree : A hierarchical structure for rapid interference detection. *Computer Graphics*, 30(Annual Conference Series) :171–180, 1996.
- [19] P. Hubbard. Approximating polyhedra with spheres for time-critical collision detection. *ACM Transactions on Graphics*, 15(3) :179–210, July 1996.
- [20] J. M. Jolion and A. Montanvert. The adaptive pyramid : a framework for 2D image analysis. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing. Image Understanding*, 55(3) :339–349, May 1992.
- [21] I. J. Palmer and R. L. Grimsdale. Collision detection for animation using sphere-trees. *Computer Graphics Forum*, 14(2) :105–116, June 1995.
- [22] J. Pfaltz and A. Rosenfeld. Computer representation of planar regions by their skeletons. *Communications of the ACM*, 10(2) :119–122, February 1967.
- [23] S. Prevost, L. Lucas, and E. Bittar. Multiresolution and shape optimization of implicit skeletal model. In V. Skala, editor, *WSCG 2001 Conference Proceedings*, 2001.
- [24] S. Quinlan. Efficient distance computation between non-convex objects. In Edna Straub and Regina Spencer Sipple, editors, *Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation. Volume 4*, pages 3324–3330, Los Alamitos, CA, USA, May 1994. IEEE Computer Society Press.
- [25] A. Sud, M. Foskey, and D. Manocha. Homotopy-preserving medial axis simplification. In Leif Kobbelt and Vadim Shapiro, editors, *Proceedings of the Ninth ACM Symposium on Solid and Physical Modeling 2005, Cambridge, Massachusetts, USA, June 13-15, 2005*, pages 39–50. ACM, 2005.
- [26] A. Telea, C. Sminchisescu, and S. J. Dickinson. Optimal inference for hierarchical skeleton abstraction. In *ICPR (4)*, pages 19–22, 2004.
- [27] G. van den Bergen. Efficient collision detection of complex deformable models using AABB trees. *Journal of Graphics Tools : JGT*, 2(4) :1–14, 1997.