Analyse de structures fibreuses dans un contexte de procédés catalytiques

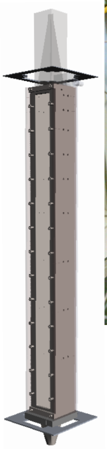
Pierre Gueth

Laboratoire d'InfoRmatique en Image et Systèmes d'information
LIRIS UMR 5205 CNRS/INSA de Lyon/Université Claude Bernard Lyon 1/Université Lumière Lyon 2/École Centrale de Lyon
INSA de Lyon, bâtiment J. Verne
20, Avenue Albert Einstein - 69622 Villeurbanne cedex
http://liris.cnrs.fr

17 juillet 2015

Mousses catalytiques

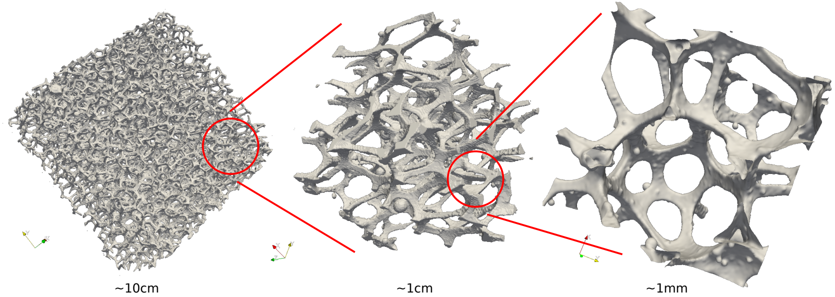
- Catalyseur gaz/gaz ou gaz/solide
- Matériaux variés
  - métal (Cu, Al)
  - plastique (polyuréthane)
- Rigidité massique élevée
- Forte surface volumique
- Pont endo ou exothermique
- Faible perte de charge



Banc thermique LGPC

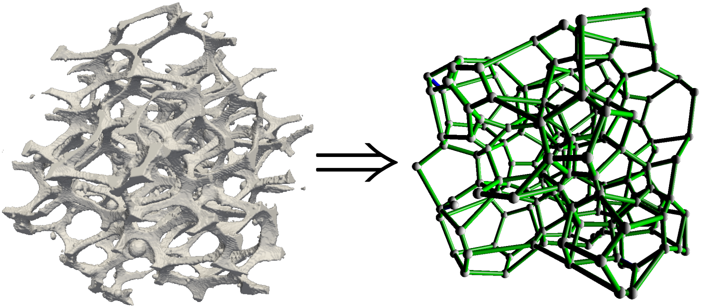
Mousses catalytiques

- Fabrication difficilement répétable
- Importantes variations intra mousse
- Géométrie complexe non planaire
- Effets d'échelles multiples



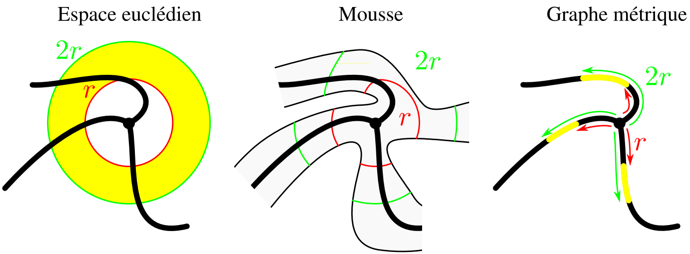
Modélisation graphe métrique

- Caractéristiques des mousses
  - structure topologique : cellule, trou et cycle
  - géométrie : distance, surface et volume
- Modèle graphe métrique
  - Graphe $=$ nœuds $+$ arêtes
  - Métrication du graphe $=$ longueur des arêtes
  - Variété différentielle 1D



Modélisation physique

- Variété ⇒ Champs et opérateurs linéaires tensoriels
- Distance géodésique = longueur du plus court chemin



- Projection des opérateurs de la mousse sur le modèle
- Résolution équations physiques linéaires classiques
  - Diffusion thermique
  - Propagation acoustique
  - Résistivité électrique

Outils

- Amincissement homotopique
  - Squelettisation itérative guidée par carte de distance
  - Conservation de la topologie / réduction de la taille
- Calcul extérieur discret (DEC)
  - Schéma de discrétisation moderne simple d'utilisation
  - Opérateurs linéaires classiques ∇ Δ $\nabla\cdot$ $\nabla\wedge$
  - Théorème de Stokes $\Rightarrow$ solution unique
- Distance géodésique
  - Équation de chaleur *[CRANE13]*
  - Earth mover's distance *[SOLOMON14]*
- Estimation du graphe métrique *[AANJANEYA12]*
- Carte d'épaisseur
  - Champs d'épaisseur et de section sur le graphe métrique

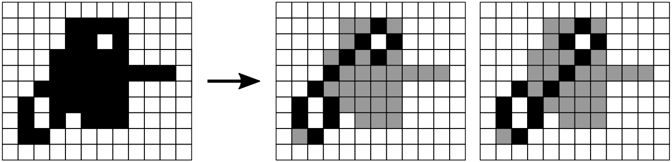
Amincissement homotopique

Simplification de la structure sans changement de topologie

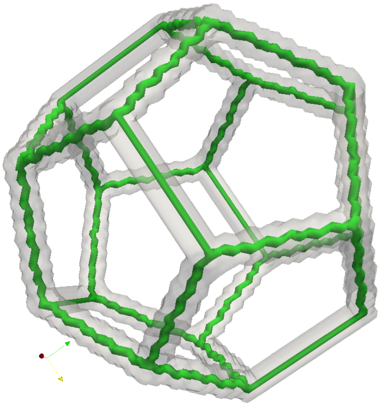
- Processus d'érosion itératif
- Pas de création ni d'obstruction de trous
- L'objet simplifié ultime est le squelette topologique
- Guidée par carte de distance
- Solution non unique

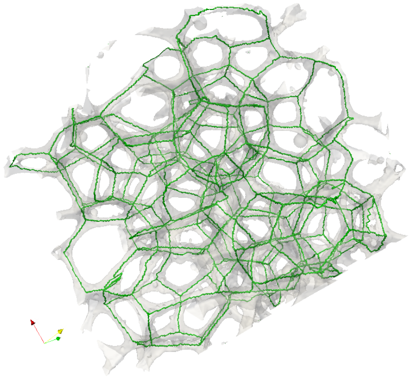
Invariant topologique

- simple $\Leftrightarrow$ ne change pas la topologie si enlevé
- test de simplicité local $\Rightarrow$ efficace

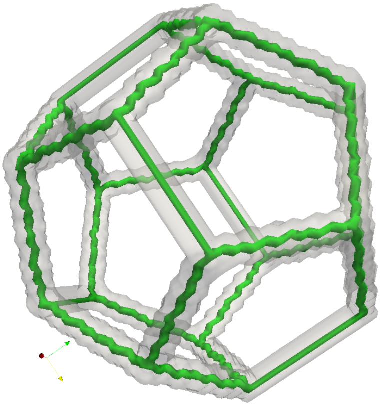


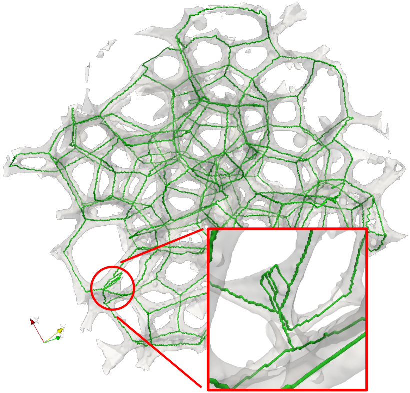
Amincissement homotopique





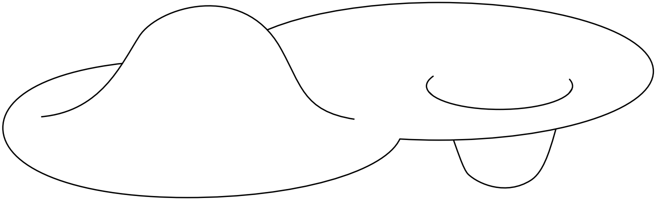
Amincissement homotopique





Variété Riemannienne

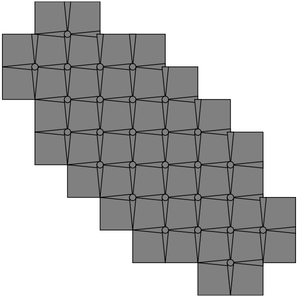
- Espace courbe et continue M avec bord ∂M
- Points p, q
- Système de coordonnées x^1, x^2
- 0-forme $\Leftrightarrow$ champ scalaire
- 1-forme $\Leftrightarrow$ champ de vecteurs $\in T_pM$ espace tangent



Calcul extérieur discret (DEC)

- Discrétisation sur complexe cellulaire
- 0-cellule ⇔ point, 1-cellule ⇔ arête, ...
- k-cellules portent les valeurs des k-formes
- Discrétisation exacte des opérateurs de base (Stokes)

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$



Opérateurs classiques

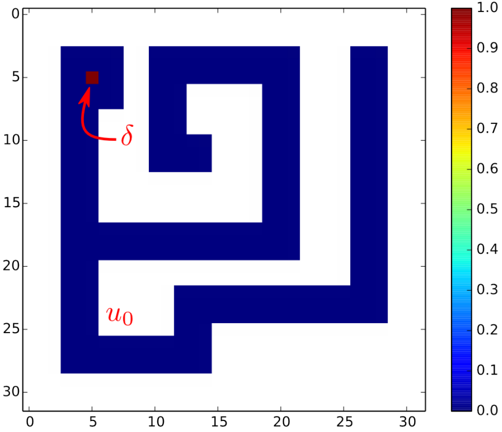
Gradient	$\nabla = d$
Divergence	$\nabla \cdot = \ast d \ast$
Rotationnel	$\nabla \wedge = d \ast$
Laplacien	$\Delta = \ast d \ast d$

Géodésique : Équation de la chaleur *[CRANE13]*

1. Flux chaleur
   $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$
   $t \ll 1$
   $u(t=0) = u_0$
2. Normalisation
   $X = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$
3. Équation Poisson
   $\Delta \phi = \nabla \cdot X$
4. $u_0 = \delta \Rightarrow \phi$ distance

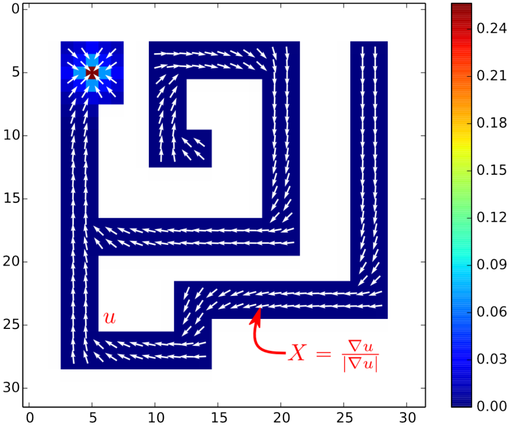
Géodésique : Équation de la chaleur *[CRANE13]*

1. Flux chaleur
   $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$
   $t \ll 1$
   $u(t = 0) = u_0$
2. Normalisation
   $X = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$
3. Équation Poisson
   $\Delta \phi = \nabla \cdot X$
4. $u_0 = \delta \Rightarrow \phi$ distance



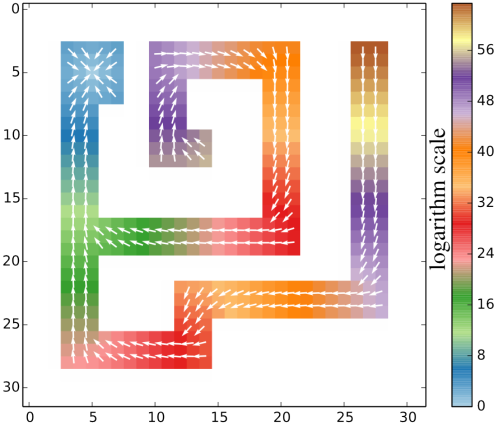
Géodésique : Équation de la chaleur *[CRANE13]*

1. Flux chaleur
   $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$
   $t \ll 1$
   $u(t=0) = u_0$
2. Normalisation
   $X = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$
3. Équation Poisson
   $\Delta \phi = \nabla \cdot X$
4. $u_0 = \delta \Rightarrow \phi$ distance



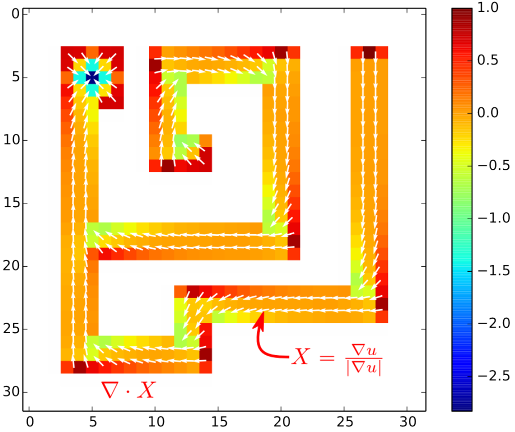
Géodésique : Équation de la chaleur *[CRANE13]*

1. Flux chaleur
   $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$
   $t \ll 1$
   $u(t=0) = u_0$
2. Normalisation
   $X = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$
3. Équation Poisson
   $\Delta \phi = \nabla \cdot X$
4. $u_0 = \delta \Rightarrow \phi$ distance



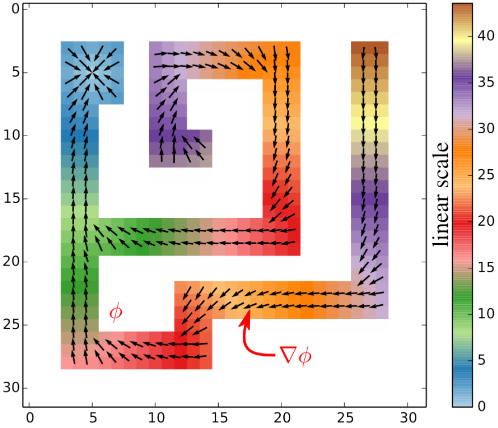
Géodésique : Équation de la chaleur *[CRANE13]*

1. Flux chaleur
   $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$
   $t \ll 1$
   $u(t=0) = u_0$
2. Normalisation
   $X = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$
3. Équation Poisson
   $\Delta \phi = \nabla \cdot X$
4. $u_0 = \delta \Rightarrow \phi$ distance

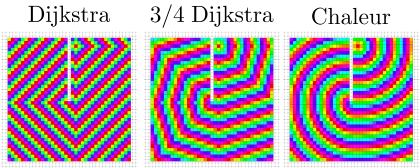


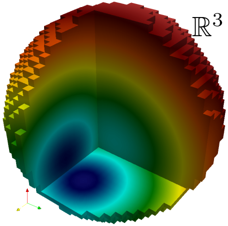
Géodésique : Équation de la chaleur *[CRANE13]*

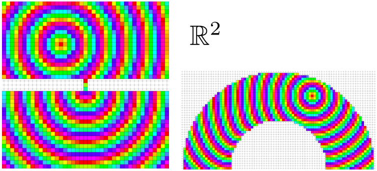
1. Flux chaleur
   $\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$
   $t \ll 1$
   $u(t = 0) = u_0$
2. Normalisation
   $X = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$
3. Équation Poisson
   $\Delta\phi = \nabla \cdot X$
4. $u_0 = \delta \Rightarrow \phi$ distance

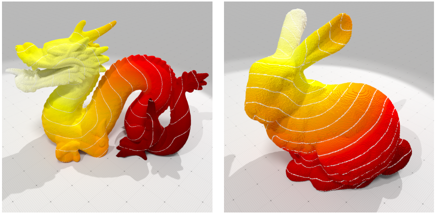


Géodésique : Équation de la chaleur *[CRANE13]*





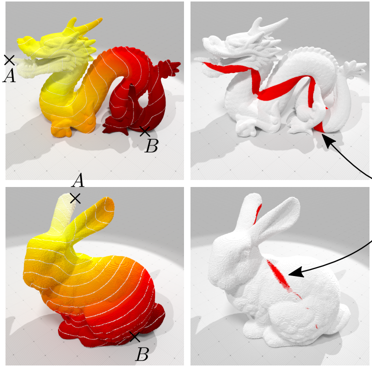




$M \subset \mathbb{R}^3$

Géodésique : Équation de la chaleur *[CRANE13]*

- Paramètre de “temps” délicat à régler
- Pas de respect de l’inégalité triangulaire
- Rapide
- Calcul direct des cartes de distance



$$||AB|| - ||AX|| - ||BX|| > 0$$

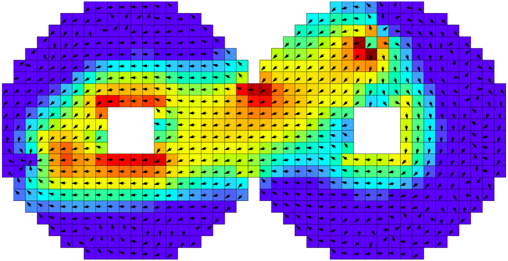
Géodésique : Earth mover's distance *[SOLOMON14]*

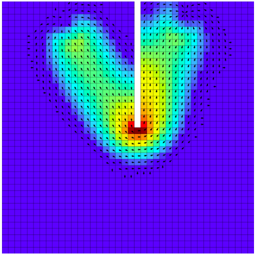
EMD résout le transport le plus petit en norme 1-Wasserstein

$$\inf_T \int_M d(x, T(x))\,\mathrm{d}\mu(x),\ T(\mu) = \nu \ \Leftrightarrow\ \inf_J \int_M |J(x)|\,\mathrm{d}x, \nabla\cdot J = \mu - \nu$$

1. Décomposition de Helmoltz $J = \nabla\alpha + \nabla \wedge \beta + \gamma$
2. Poisson $\Delta\alpha = \nabla \cdot J$
3. Trouvez les K plus petites valeurs propres de Δ
4. $\nabla \wedge \beta + \gamma$ est orthogonal au sous espace généré par les vecteurs propres de Δ
5. $\forall k \leqslant K$, Projeter itérativement $\nabla \wedge \beta + \gamma$ sur les orthogonaux des k plus petits vecteurs propres
6. $K \uparrow \Rightarrow$ le transport converge vers son optimal

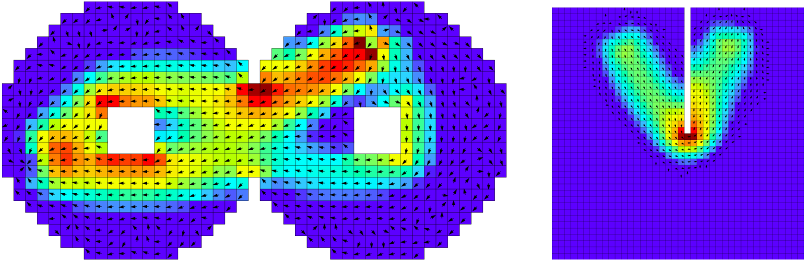
Géodésique : Earth mover's distance *[SOLOMON14]*





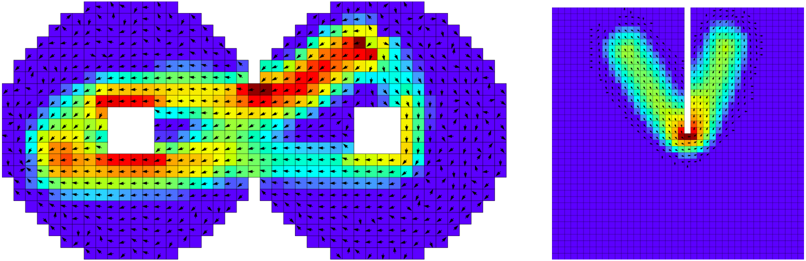
25 valeurs propres

Géodésique : Earth mover's distance *[SOLOMON14]*



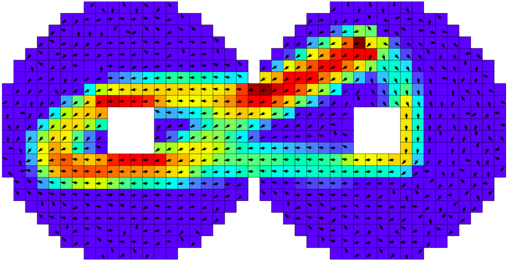
50 valeurs propres

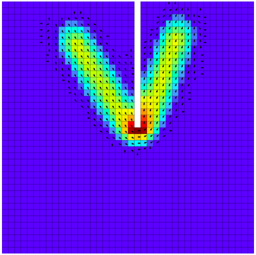
Géodésique : Earth mover's distance *[SOLOMON14]*



100 valeurs propres

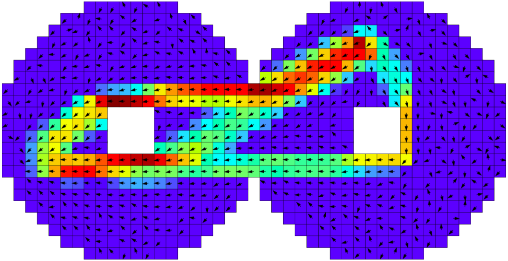
Géodésique : Earth mover's distance *[SOLOMON14]*

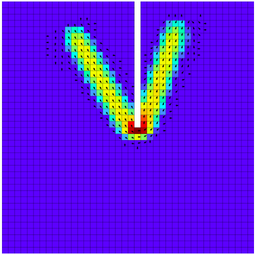




200 valeurs propres

Géodésique : Earth mover’s distance *[SOLOMON14]*





400 valeurs propres

Géodésique : Earth mover's distance *[SOLOMON14]*

- Respect l'inégalité triangulaire
- K plus petites valeurs propres $\Rightarrow$ Restarted Arnoldi ARPACK
- Distance point à point
- Coût transport entre distributions

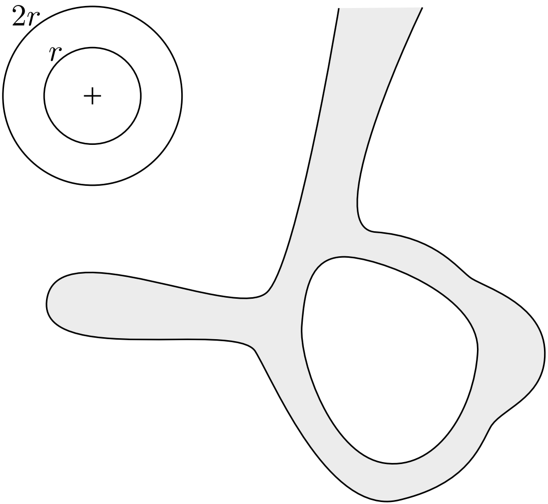
Estimation du graphe métrique *[AANJANEYA12]*

- Estimation de la valence de chaque point

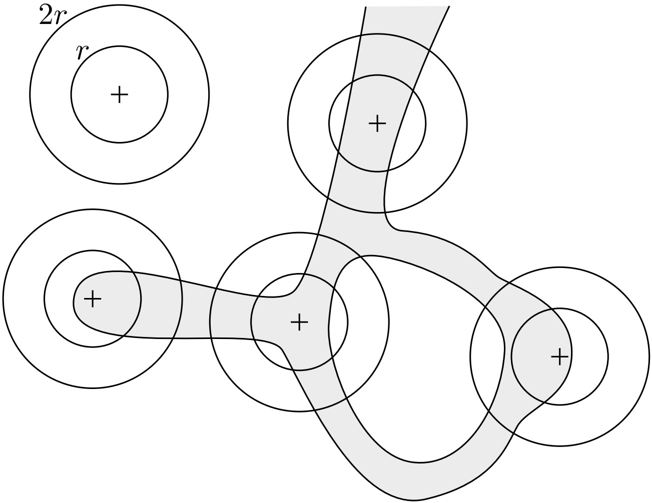
Degré $=$ nombre de composantes connexes dans une calotte sphérique centrée au point d'intérêt

- Les amas de pixels de degré constant représente les éléments du graphe métrique
  - degré $= 0 \Leftrightarrow$ nœud isolé
  - degré $= 1 \Leftrightarrow$ nœud au bout d'une arête pendante
  - degré $= 2 \Leftrightarrow$ arête
  - degré $> 2 \Leftrightarrow$ nœud
- Preuve de convergence si les piliers de la mousse sont assez effilés

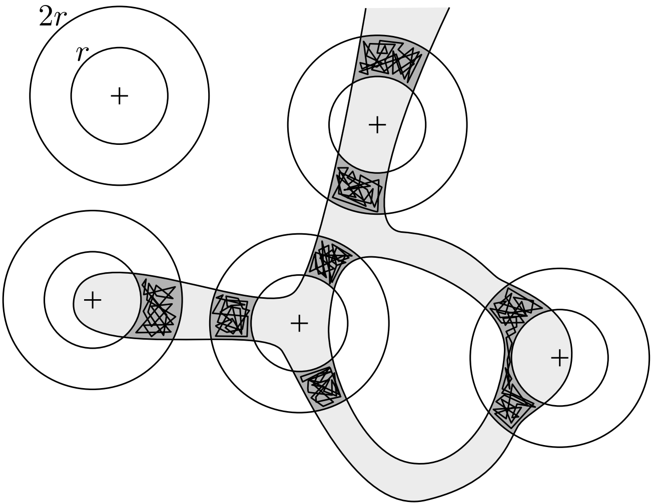
Estimation du graphe métrique *[AANJANEYA12]*



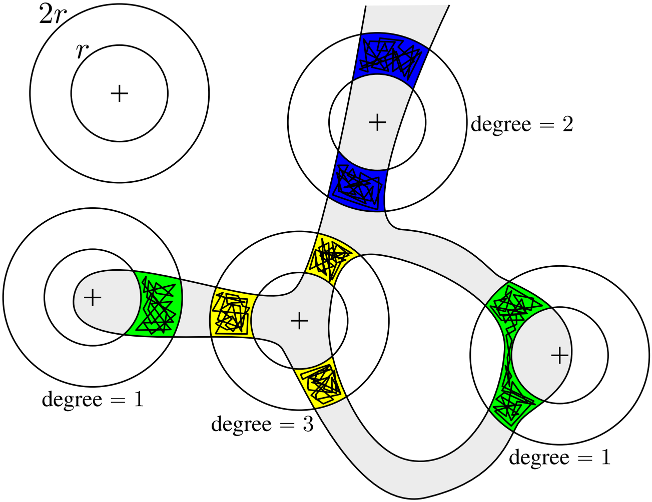
Estimation du graphe métrique *[AANJANEYA12]*



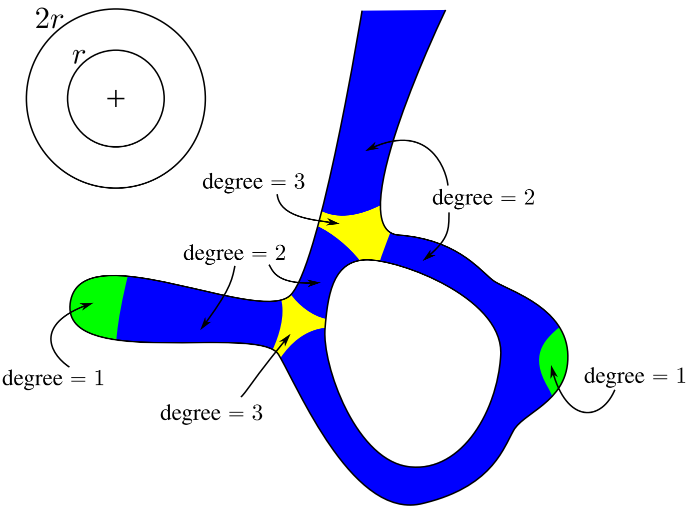
Estimation du graphe métrique *[AANJANEYA12]*



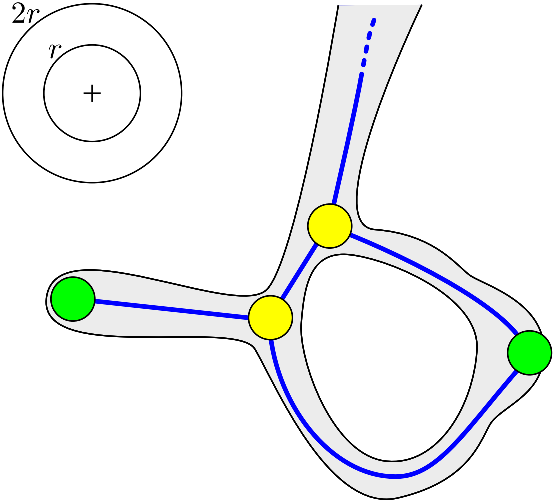
Estimation du graphe métrique *[AANJANEYA12]*



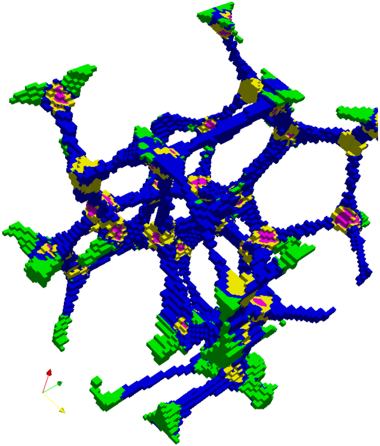
Estimation du graphe métrique *[AANJANEYA12]*

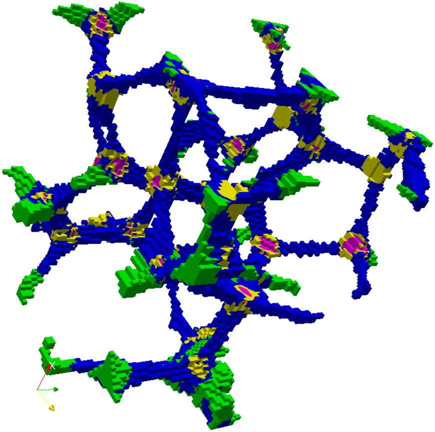


Estimation du graphe métrique *[AANJANEYA12]*

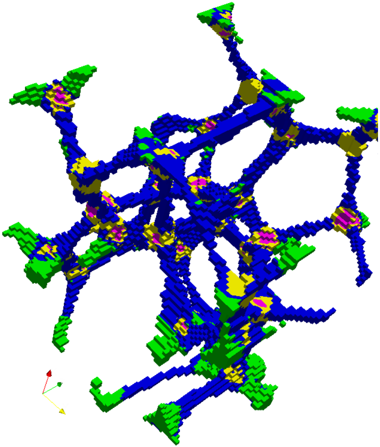


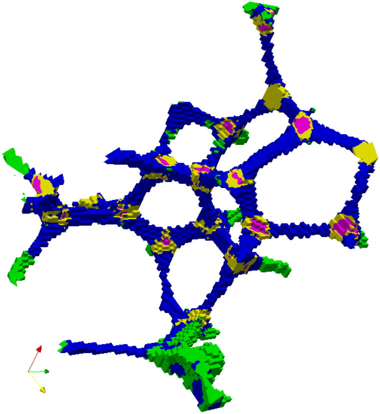
Estimation du graphe métrique *[AANJANEYA12]*





Estimation du graphe métrique *[AANJANEYA12]*



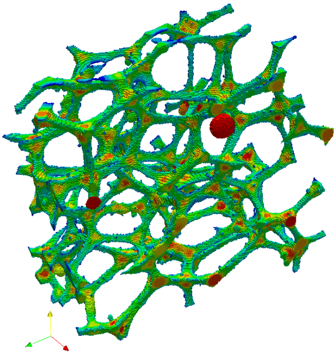


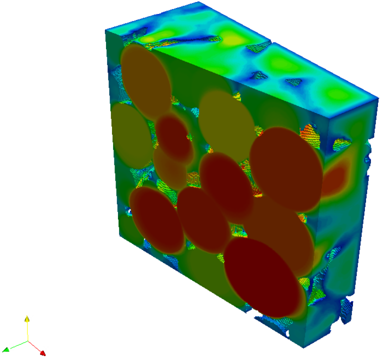
Carte d'épaisseur

Épaisseur = rayon de la boule maximale contenant le point

- Calculé en fusionnant les boules de la carte de distance
- Estimation du volume et de la section des arêtes du graphe
- Calculable sur le complémentaire pour l'analyse des cavités

Carte d'épaisseur



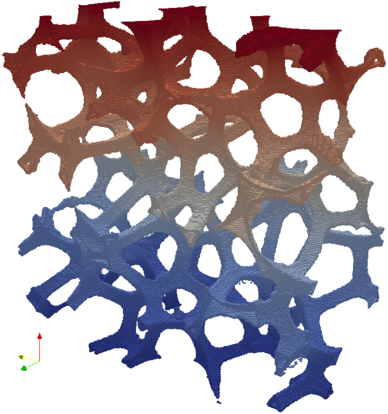


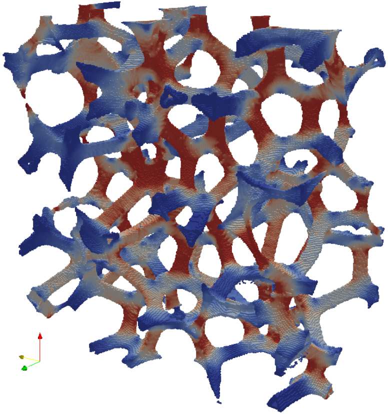
Résolution de l'équation de la chaleur

- Equation scalaire second ordre $\Delta\phi = \rho$
- Potentiel $\phi =$ température, tension, densité, ...
- Intensité $||\nabla\phi|| =$ chaleur, courant électrique, écoulement, ...
- Conditions aux bord mixtes
  - Neumann $=$ flux nul à travers le bord
  - Dirichlet $=$ spécification du potentiel

$$\phi = \phi_{\text{homogène}} + \phi_{\text{spécifique}}$$

Résolution de l'équation de la chaleur





$1358000\ \sigma^0 \Rightarrow 300\mathrm{s}$ 1CPU@2.6GHz

- Implémentation cpp générique des outils
  - Dimensions ambiante et embarquée arbitraires
  - Courbure calculée via estimateurs différentiels DSS (WIP)
  - Module DEC inclus dans DGtal
  - Avec solveurs linéaires issus de Eigen et ARPACK (F77 FTW)
  - Open source