

Traitement d'images multivariées avec l'arbre des formes

Edwin Carlinet et Thierry Géraud

Laboratoire de Recherche et Développement de l'EPITA (LRDE)
Université Paris-Est, LIGM, Équipe A3SI, ESIEE

Résumé

The Tree of Shapes (ToS) is a morphological tree that provides an high-level hierarchical, self-dual and contrast invariant representation of the image suitable for many image processing tasks. When dealing with color images, one cannot use the Tree of Shapes because its definition is ill-formed on multivariate data. Common workarounds such as marginal processing, or imposing a total order on data are not satisfactory and yield many problems (color artifacts, loss of invariances...). In this paper, we highlight the need for a self-dual and contrast invariant representation of the image and we provide a method that builds a single Tree of Shapes by merging the shapes computed marginally and preserving the most important properties of the ToS. This method does not try to impose an arbitrary total ordering on values but uses only the inclusion relationship between shapes and the merging strategy works in a shape space. Eventually, we show the relevance of our method and our structure through image simplification and interactive segmentation.

L'Arbre des Formes (ToS) est un arbre morphologique qui fournit une représentation hiérarchique de l'image auto-duale et invariante par changement de contraste. De ce fait, il est adapté à de nombreuses applications de traitement d'images. Néanmoins, on se heurte à des problèmes avec l'Arbre des Formes lorsqu'on doit traiter des images couleurs car sa définition tient uniquement en niveaux de gris. Les solutions les plus courantes sont alors d'effectuer un traitement composante par composante (marginal) ou d'imposer un ordre total. Ces solutions ne sont généralement pas satisfaisantes et font survenir des problèmes (des artefacts de couleur, des pertes de propriétés...) Dans cet article, nous insistons sur la nécessité d'une représentation à la fois auto-duale et invariante par changement de contraste et nous proposons une méthode qui construit un Arbre des Formes unique en fusionnant des formes issues des composantes marginales tout en préservant les propriétés intrinsèques de l'arbre. Cette méthode s'affranchit de tout relation d'ordre totale en utilisant uniquement la relation d'inclusion entre les formes et en effectuant une fusion dans l'espace des formes. Finalement, nous montrerons la pertinence de notre méthode et de la structure en les illustrant sur de la simplification d'images et de la segmentation interactive.

1. Introduction

L'arbre des formes [CCM99, CM09] est une représentation hiérarchique de l'image témoignant de l'inclusion de ses lignes de niveaux. L'efficacité de cette structure pour le traitement d'images réside dans ses propriétés. D'abord, c'est une représentation morphologique (donc invariante par changement de contraste) basée sur l'inclusion des composantes connexes de l'image obtenues à différents niveaux de seuillage. En conséquence, un filtrage basique de cet arbre est un filtre connexe, c'est-à-dire un filtre qui ne déplace pas les contours des objets mais se contente de supprimer ou préserver certains d'entre eux [SS95]. Ensuite, non seulement cette structure est invariante par

changement de contraste global mais elle l'est aussi *localement* [CMS05]. Cette propriété est très importante dans de nombreuses applications de vision par ordinateur où la robustesse au changement d'illumination est un véritable challenge, e.g. pour la mise en correspondance de scènes ou la reconnaissance d'objets. La figure 1d montre cette invariance en simulant un changement d'illumination directement avec l'arbre des formes, on a donc la même représentation arborescente sur cette image que sur l'image d'origine montrée sur la figure 1b. Enfin, au delà de son invariance au changement de contraste, l'arbre des formes est aussi une représentation auto-duale de l'image. Cette propriété est fondamentale dans un contexte où les

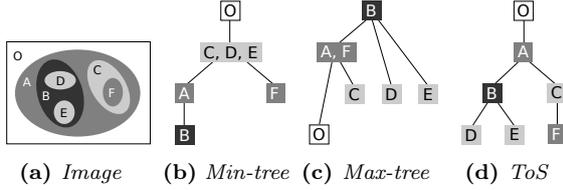


Figure 2: Une image (a), et ses arbres morphologiques de composantes (b) à (d).

\leq est un ordre total. En fait, l'ordre doit être total dû à la définition des lignes de niveaux en termes de contours de coupes inférieures ou supérieures. Soit $[u \leq \lambda]$ (resp. $[u \geq \lambda]$) une coupe inférieure (resp. supérieure) de u définie par $[u \leq \lambda] = \{x, u(x) \leq \lambda\}$. On note $\mathcal{CC}(X), X \in \mathcal{P}(E)$ l'ensemble des composantes connexes de X . Si \leq est total, deux composantes connexes $X, Y \in \mathcal{CC}([u < \lambda])$ sont disjointes ou incluses. L'ensemble $\mathcal{CC}([u < \lambda])$ muni de la relation d'inclusion est un arbre appelé *min-tree* et son arbre dual, défini sur les coupes supérieures, est le *max-tree* (voir les figures 2b et 2c). Soit l'opérateur de bouchage de trou \mathcal{H} , on appelle une *forme* un élément de $\mathcal{S} = \mathcal{H}([u \leq \lambda]) \cup \mathcal{H}([u \geq \lambda])$. Si \leq est total, là encore deux formes seront disjointes ou incluses et donc la couverture de (\mathcal{S}, \subseteq) forme un arbre : l'*arbre des formes* (voir la figure 2d). Dans le reste de ce papier, par abus de notation, on considère implicitement la couverture de (\mathcal{S}, \subseteq) lorsqu'on écrit (\mathcal{S}, \subseteq) . Notons aussi que l'arbre des formes traduit à la fois l'inclusion des formes et l'inclusion des lignes de niveaux puisque celles-ci sont les frontières des formes. Enfin, sans perte de généralité, on considère $E = \mathbb{R}^n$ tout au long de ce papier et on notera u pour les images scalaires ($n = 1$) et \mathbf{u} pour les images multivariées.

2.2. Le problème des données multivariées : solutions standard et travaux connexes

Les définitions précédentes des lignes de niveaux (en termes d'ensemble d'iso-niveau ou en tant que contour de formes) sont toutes deux mal formées en présence d'un ordre partiel. En effet, les ensembles d'iso-niveau ne forment pas des courbes fermées et les formes issues des coupes inférieures et supérieures peuvent se chevaucher, i.e., (\mathcal{S}, \subseteq) forme un graphe. Un moyen largement utilisé mais peu acceptable de résoudre le problème est de traiter l'image en niveaux de gris uniquement (e.g. la luminance). Cette approche reste plausible si on prétend que l'information géométrique est principalement contenue par la luminance [CCM02]. Cependant, il n'est pas rare de rencontrer des images où les contours des objets n'existent qu'à travers la composante chromatique (notamment sur les images de document ou de synthèse). Ces exemples contredisent cette supposition et montrent que la chrominance contient également l'information géométrique (voir la figure 3b).



Figure 3: Les problèmes liés à la simplification avec les approches "standard" pour traiter la couleur. (b) montre le problème de fuite lorsque la luminance n'est suffisante pour obtenir complètement l'information géométrique. (c) montre le problème de fausses couleurs dues au traitement marginal. (d) Notre méthode récupère correctement le contenu principal de l'image sans introduire d'artefact visuel.

Une autre solution communément employée est le traitement de l'image canal par canal, puis la recombinaison des résultats individuels. Le traitement marginal est sujet au problème connu des fausses couleurs puisqu'il permet de créer des couleurs qui n'étaient pas présentes dans l'image d'origine. Les fausses couleurs peuvent être un problème ou pas (par exemple si les fausses couleurs sont suffisamment proches des couleurs d'origines pour ne pas être distinguées), mais dans le cas de la simplification, il produit des artefacts de couleurs indésirables comme montrés sur la figure 3c. Aussi, le traitement marginal produit au final plusieurs arbres (un pour chaque canal de l'image) alors que nous souhaitons obtenir une structure *unique* de l'image. Dans [CG14b], nous avons proposé des idées préliminaires sur la manière d'obtenir un arbre unique à partir de plusieurs arbres.

Puisque le problème des formes qui se chevauchent est dû à l'ordre partiel des couleurs, des auteurs ont tenté d'imposer arbitrairement un ordre ou un pré-ordre *total*. Ils diffèrent en le fait qu'un nœud de l'arbre puisse être associé à une ou plusieurs valeurs. La manière d'ordonner un espace multivarié a été largement étudiée pour étendre les opérateurs morphologiques. [Bar76] classe les méthodes en quatre groupes : les ordres marginaux (M-ordering), les or-

dres conditionnels (C-ordering), les ordres partiels (P-ordering) et les ordres réduits (R-ordering). Alors que la première classe mène à un ordre partiel, les trois autres donnent un ordre ou un préordre total. Les ordres conditionnels visent à organiser les vecteurs en donnant des priorités à certaines (ou toutes) composantes du vecteur. L'ordre lexicographique, bien connu, appartient à cette classe et est la méthode la plus commune pour étendre l'arbre des formes aux couleurs [CF00]. Les ordres réduits visent à projeter des données vectorielles sur un espace réel à travers une fonction de rang. Les fonctions de rang bien connues sont par exemple la norme l_1 , la luminance dans un espace couleur donné, ou la distance à un ensemble de couleurs de référence. Elles ont été appliquées dans [TW12, PLCS10, NP09] pour la compression d'image et pour la détection d'objets astronomiques en utilisant les min ou max-trees mais l'idée est transposable pour l'arbre des formes [CG14a]. Des stratégies plus avancées ont été conçues pour donner naissance à un ordre total plus "sensé" où celui-ci dépend du contenu de l'image. [VFA11, VFA12] utilisent l'apprentissage automatique pour obtenir un P-ordering basé sur le partitionnement de l'espace, puis établissent une distance entre ces regroupements. Dans [LCE*09], l'apprentissage de variétés est utilisé pour inférer une fonction de rang sur les couleurs et dans [LME05], un ordre total est calculé localement sur une fenêtre spatiale glissante. Une liste non-exhaustive pour inférer un ordre total sur les données multivariées peut être trouvée dans [AL07].

Une autre approche introduite par [PN09] utilise directement l'ordre partiel des valeurs et manipule la structure sous-jacente qui est un graphe. Le graphe des composantes est encore à l'état de développement mais a montré des résultats prometteurs dans le cadre de filtrage [NP13]. Néanmoins, le graphe des composantes fait face à un problème de complexité algorithmique qui oblige les auteurs à effectuer le filtrage localement. De ce fait, le graphe des composantes est à l'heure actuelle non adapté si l'on veut une représentation de l'image entière.

Dans [CG14b], nous avons introduit une nouvelle approche où, au lieu d'essayer d'imposer un ordre total sur les valeurs, nous calculons marginalement les arbres des formes et les fusionnons en un arbre unique. Le procédé de fusion ne dépend pas d'un ordre total sur les valeurs mais sur des propriétés calculées dans l'espace des formes. Néanmoins, la stratégie de fusion proposée dans ce papier souffre d'un manque de "cohérence" car elle fusionne ensemble des formes sans liaisons apparentes. Dans [CG14a], inspiré par le travail de [PN09], nous avons proposé le graphe des formes qui fusionne les arbres des formes marginaux en une seule structure et de façon efficace. Nous avons montré que cette structure avait un fort potentiel comparée aux approches standard qui imposent un ordre total. Cependant, la méthode construit un graphe, ce qui est une limitation puisque nous ne pouvons plus utiliser les outils fournis par l'état de l'art sur les arbres de

composantes (filtrage, détection d'objets, méthodes de segmentation...). Le travail présenté ici peut être vu comme la poursuite des idées introduites dans [CG14b] et [CG14a] puisque le graphe des formes est utilisé comme une représentation intermédiaire pour extraire un arbre unique depuis les formes issues des arbres des formes marginaux.

3. L'arbre des formes couleur

3.1. Contraintes et propriétés de l'arbre des formes couleur

Commençons d'abord par relâcher la définition de forme. Une forme X est une composante connexe de Ω sans trous (i.e. telle que $\mathcal{H}(X) = X$). Soit une famille d'ensemble de formes $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n\}$ où chaque élément $(\mathcal{S}_i, \subseteq)$ forme un arbre. On note $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}_i$ l'ensemble initial de formes. Notons que (\mathcal{S}, \subseteq) ne forme généralement pas un arbre mais un graphe puisque des formes peuvent se chevaucher. On cherche à définir un nouvel ensemble de formes \mathcal{S}' tel que deux formes soient disjointes ou incluses. On ne se limite pas aux ensembles $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$. En d'autres termes, on autorise la méthode à créer de nouvelles formes qui n'étaient pas présentes dans l'ensemble de formes d'origine. On note $T(\mathbf{u}) : \Omega^{\mathbb{R}^n} \rightarrow (\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega)), \subseteq)$, le processus qui construit un arbre des formes $(\mathcal{S}', \subseteq)$ à partir d'une image $\mathbf{u} \in \Omega^{\mathbb{R}^n}$.

Plus formellement, on souhaite que la méthode T produise $(\mathcal{S}', \subseteq)$ avec les propriétés suivantes :

- (R1) La couverture du domaine $(\bigcup_{X \in \mathcal{S}'} X) = \Omega$ (tout point appartient à au moins une forme)
- (R2) Une structure arborescente $\forall X, Y \in \mathcal{S}'$, soit $X \cap Y = \emptyset$ ou $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$ (deux formes sont disjointes ou incluses)

Et on impose également les contraintes suivantes :

- (R3) L'équivalence avec ToS scalaire. Si $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}_1\}$ alors $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_1$ (si l'image est scalaire, alors la méthode doit produire le même arbre que l'arbre des formes calculé sur l'image d'origine).
- (R4) Pour chaque forme $X \in \mathcal{S}$ telle que pour chaque autre forme $Y \in \mathcal{S}$, $X \cap Y = \emptyset$ ou $X \subseteq Y$ ou $Y \subseteq X$ alors, $X \in \mathcal{S}'$ (une forme qui ne chevauche aucune autre forme doit exister dans l'arbre final).
- (R5) L'invariance par changement et inversion de contraste Une transformation ψ est dite morphologique (i.e. invariante par changement de contraste) si pour une fonction croissante $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(\psi(u)) = \psi(g(u))$. De plus, la transformation est dite auto-duale si elle est invariante par complément $\mathcal{C}(u) = -u$ i.e. $\mathcal{C}(\psi(u)) = \psi(\mathcal{C}(u))$. Soit une fonction monotone $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$ ou $F(x) > F(y)$, ψ est à la fois auto-duale et invariante par changement de contraste si $F(\psi(u)) = \psi(F(u))$. L'arbre des formes est un support pour certains opérateurs morphologiques auto-duaux et une représentation T est dite auto-duale et morphologique

si $T(F(u)) = T(u)$. Pour l'extension au multivarié de cette propriété, notons \mathcal{F} l'ensemble de toutes les fonctions monotones, T est dit invariant par changement et inversion de contraste si pour $\mathbf{F} \in \mathcal{F}^n$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))$, alors $T(\mathbf{F}(\mathbf{u})) = T(\mathbf{u})$.

3.2. Description de la méthode

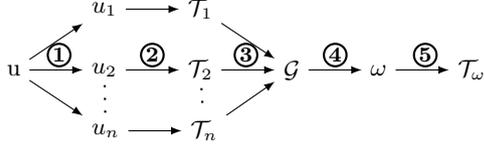


Figure 4: Les 5 étapes de la méthode proposée. (1) L'image d'entrée \mathbf{u} est décomposée en ses différentes composantes u_1, u_2, \dots, u_n , (2) l'arbre des formes est calculé sur chaque composante, (3) les arbres des formes sont fusionnés en une unique structure : le graphe des formes, (4) une image scalaire ω est calculée en utilisant la profondeur des nœuds auxquels les points appartiennent. (5) un arbre est calculé à partir de ω .

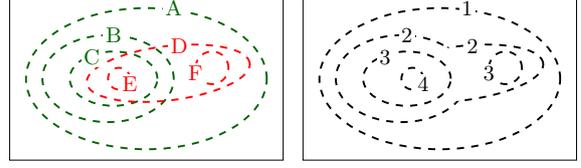
La méthode que nous proposons est un processus en 5 étapes (voir la figure 4). Tout d'abord, \mathbf{u} est décomposé en ses composantes individuelles u_1, u_2, \dots, u_n sur lesquelles on calcule les arbres des formes $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \dots, \mathcal{T}_n$ associés aux ensembles de formes $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_n$. On note $\mathcal{S} = \bigcup \mathcal{S}_i$, on appelle le graphe des formes \mathcal{G} la couverture de (\mathcal{S}, \subseteq) , i.e. c'est le graphe d'inclusion des toutes les formes issues de coupes marginales. Soit $\rho : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{N}$ un attribut de forme algébrique décroissant i.e. $\forall A, B \in \mathcal{S}, A \subset B \Rightarrow \rho(A) > \rho(B)$

Nous discuterons plus loin du choix de ρ en tant qu'attribut de sélection de forme ou d'attribut de fusion de formes. Un exemple d'un tel opérateur est l'attribut de profondeur. La profondeur d'une forme A de \mathcal{G} est la longueur du chemin le plus long de la racine vers A . ω Soit $\omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ défini par :

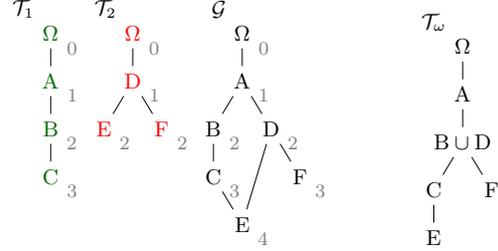
$$\omega(x) = \max_{X \in \mathcal{S}, x \in X} \rho(X) \quad (1)$$

ω est une image scalaire qui associe en chaque point de x , la profondeur de la forme la plus profonde qui le contient (voir les figures 5b et 5c) Soit $\mathbb{C} = \{CC([\omega \geq h]), h \in \mathbb{R}\}$. (\mathbb{C}, \subseteq) est en fait le max-tree de ω . Ce dernier pouvant donner lieu à des composantes avec des trous, on considère donc $\mathcal{S}' = \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $(\mathcal{S}', \subseteq)$ pour l'arbre des formes final \mathcal{T}_ω (voir la figure 5d).

Intuition. On explique maintenant l'intuition de cette démarche. D'abord, nous commençons par calculer les arbres des formes marginaux de \mathbf{u} qui nous donnent un ensemble de formes initial. Les différents arbres (ensemble) fournissent une représentation de l'image d'origine et \mathbf{u} peut être reconstruite marginalement depuis ces arbres. Cependant, la manipulation simultanée des différents arbres est délicate et il manque



(a) Image originale \mathbf{u} (2- (c) L'image ω construite canaux) et ses formes. depuis \mathcal{G}



(b) Les arbres des formes (d) Le max-tree \mathcal{T}_f of ω marginaux $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ et le graphe des formes. La profondeur apparaît en gris clair près des nœuds.

Figure 5: Schéma illustrant le fonctionnement de la méthode

une information capitale : comment les formes d'un arbre donné sont liées (au sens de l'inclusion) aux formes des autres arbres. Le graphe \mathcal{G} n'est rien de plus que ces arbres fusionnés en une unique structure et ajoute la relation d'inclusion qui manquait précédemment. Par conséquence, \mathcal{G} est plus "riche" que $\{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n\}$ parce que la transformation de $\{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n\}$ à \mathcal{G} est réversible ; \mathcal{G} est une représentation complète de \mathbf{u} (\mathbf{u} peut être reconstruite depuis \mathcal{G}). De plus, \mathcal{G} est invariant par changement et inversion de contraste marginal de \mathbf{u} car $\{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n\}$ le sont.

La seconde partie de la méthode tente d'extraire un arbre depuis \mathcal{G} vérifiant les contraintes données dans la section 3.1. Le problème majeur est d'obtenir un nouvel ensemble de formes depuis \mathcal{G} qui ne se chevauchent pas. Notons d'abord que pour n'importe quel attribut décroissant ρ , on a (\mathcal{S}, \subset) qui est isomorphe à $(\mathcal{S}, \mathcal{R})$ où $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow \rho(A) > \rho(B)$ and $A \cap B \neq \emptyset$. En termes plus simples, la relation d'inclusion entre deux formes que nous voulons conserver peut s'exprimer en terme de valeurs d'attributs dans \mathbb{R} . Supposons maintenant que (\mathcal{S}, \subset) est un arbre et considérons l'image $\omega(x) = \max_{X \in \mathcal{S}, x \in X} \rho(x)$, on a ainsi $\mathbb{C} = \{CC([\omega \geq h]), h \in \mathbb{R}\} = \mathcal{S}$. Dit autrement, le max-tree de l'image ω reconstruite à partir de l'attribut ρ évalué sur un arbre \mathcal{T} donne exactement le même arbre \mathcal{T} (pré-requis R3). Plus généralement, si une forme A ne chevauche aucune autre forme de \mathcal{S} alors elle appartiendra à $CC([\omega \geq h])$ (pré-requis R4). Dans la section qui suit, nous allons maintenant justifier le choix de la profondeur comme attribut pour ρ .

3.3. Le calcul de la carte d'attribut ω

La 4^e étape de la méthode consiste à choisir un attribut à évaluer sur le graphe des formes \mathcal{G} . C'est une étape critique qui décide de quelle forme va être fusionnée ou supprimée. On distingue deux stratégies :

- les stratégies de sélection de formes qui imposent $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$. Elles obligent que toute forme de l'arbre final doit exister dans au moins un des arbres marginaux.
- les stratégies de fusion de formes qui autorisent que l'ensemble de formes final \mathcal{S}' soit composé d'unions ou d'intersections de formes de \mathcal{S} .

Dans ce papier, on se concentre uniquement sur la seconde stratégie et nous expliquons maintenant pourquoi nous utilisons la profondeur comme attribut pour fusionner les formes.

Considérons la distance entre deux points (p, p') dans Ω définie par

$$d_{TV}(p, p') = \min_{C(p, p')} \int_0^1 |\nabla u(C(t)) \cdot \dot{C}(t)| dt \quad (2)$$

où $C(t)$ est un chemin dans Ω de p à p' . L'équation (2) est en fait la variation totale (TV) du chemin minimisant la TV parmi tous les chemins de p vers p' . Cette mesure a par exemple été utilisée par [DHK14] à des fins de segmentation où l'arbre des formes est utilisé comme support pour le calcul efficace de la distance. Soit $\omega_{TV}(x) = d_{TV}(\partial\Omega, x)$, la carte de distance de variation totale depuis la bordure de l'image. Celle-ci peut être calculée par simple calcul d'attribut sur l'arbre : il suffit de sommer les variations absolues le long du chemin de la racine vers un nœud. Ainsi, au lieu de considérer l'arbre \mathcal{T} des lignes de niveaux de u , on peut considérer à la place le max-tree \mathcal{T}_ω des lignes équi-distantes de TV. Les deux arbres sont équivalents en niveaux de gris. Le problème avec la variation totale est qu'elle n'est pas invariante au changement de contraste de u . Une distance invariante par changement de contraste de u serait simplement de compter le nombre de variation, i.e., le nombre minimum de ligne de niveaux à traverser pour atteindre p :

$$d_{CV}(p, p') = \min_{C(p, p')} \int_0^1 \mathbb{1}\{\nabla u(C(t)) \cdot \dot{C}(t)\} dt \quad (3)$$

Algorithmiquement parlant, construire ω_{CV} consiste à calculer l'attribut de profondeur $\rho_{CV}(A) = |\{X \in \mathcal{S} \mid A \subset X\}|$ et reconstruire $\omega_{CV}(x) = \max_{X \in \mathcal{S}, x \in X} \rho_{CV}(X)$ (voir la figure 6).

Basé sur l'équivalence entre les lignes de niveaux et les lignes "d'équidistances" en niveaux de gris, on peut étendre cette idée en couleur. Comme dans l'équation (3), on souhaite compter le nombre minimum de lignes de niveaux marginales à traverser. Plus formellement :

$$\rho(A) = \max_{\phi \in [\Omega \rightsquigarrow A]} |\phi| \text{ and } \omega_{CV}(x) = \max_{X \in \mathcal{S}, x \in X} \rho(X)$$

où $[\Omega \rightsquigarrow A]$ désigne l'ensemble de tous les chemins de la racine vers A dans \mathcal{G} . On compte ainsi le nombre

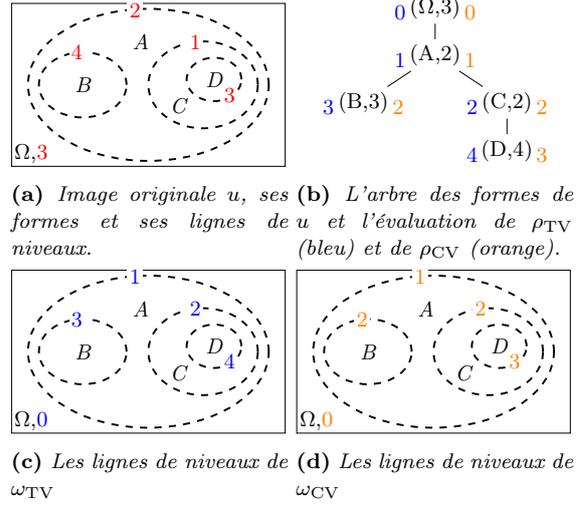


Figure 6: Équivalence entre les lignes de niveaux de l'image en niveaux de gris u et des lignes de niveaux des cartes de distances ω_{TV} et ω_{CV} .

de formes qui s'incluent à traverser pour atteindre la forme la plus profonde contenant x . ρ peut être calculé efficacement depuis \mathcal{G} en utilisant un algorithme classique de plus court chemin.

4. Applications

4.1. Simplification d'images

Pour illustrer la capacité de l'arbre des formes couleur à représenter les structures principales de l'image, nous l'avons confronté à la simplification d'images. Cette évaluation utilise la méthode proposée dans [XGN13a] qui tente de minimiser l'énergie du modèle cartoon de Mumford-Shah contrainte à la topologie de l'arbre. Plus formellement, la méthode sélectionne un sous-ensemble de formes $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ qui minimise :

$$E(\mathcal{S}') = \sum_{S \in \mathcal{S}'} \sum_{x \in S | S_x = S} \|f(x) - \bar{f}(S)\|_2^2 + \lambda |\partial S| \quad (4)$$

où S_x dénote la plus petite forme contenant x , $\bar{f}(S)$ est la couleur moyenne de la région et $|\partial S|$ est la longueur du contour de la forme. Dans [XGN13a], un algorithme glouton est utilisé pour supprimer les lignes de niveaux triées par importance jusqu'à ce que l'énergie cesse de décroître.

La figure 7 montre la simplification sur des images naturelles. Même si nous concevons que la luminance peut-être suffisante pour récupérer l'information géométrique de certaines images, il subsiste des cas où la chrominance joue un rôle important pour distinguer des régions de même luminance. Sur ces images, le faible contraste des contours entre les régions de luminances proches crée un effet de "fuite" et fusionne des formes plutôt sans rapport. La figure 8 illustre le besoin d'une représentation invariante par



Figure 7: Simplification d'images naturelles avec l'arbre des formes couleur. Le 1^{re} ligne contient les images d'origine, la 2^e contient les images simplifiées en utilisant l'arbre des formes calculé sur la luminance uniquement et la dernière ligne montre les résultats à partir de l'arbre des formes couleur. Le même paramètre λ est utilisé pour toutes les images. Travailler avec la luminance seule n'est pas suffisant et crée des fusions de lignes de niveau sans liaisons apparentes alors qu'elles sont bien disjointes dans l'arbre des formes couleur.

changement de contraste dans le cadre de la restauration de documents. Ici, le point important est que l'arbre des formes couleur est capable de récupérer des lettres peu contrastées même en présence d'un "show-thru". Puisque nous utilisons une énergie de segmentation, nous ne prétendons pas que c'est la méthode ultime pour la binarisation de document mais, puisque les documents sont grandement simplifiés tout en préservant les objets d'intérêt, elle peut servir de pré-traitement à une méthode de binarisation dédiée.

4.2. Segmentation d'objets interactive

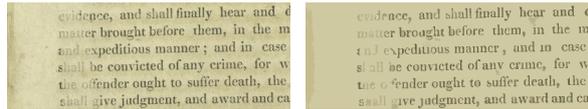
Dans [DHK14], les auteurs introduisent une méthode pour la segmentation interactive des images en utilisant leur représentation sous forme d'ensembles de niveaux. Nous étendons trivialement cette même idée à l'arbre des formes couleur. Étant donné deux ensembles de marqueurs B et F (tout deux dans $\mathcal{P}(E)$) où B est celui de la classe "fond" et F celui de la classe "objet", on cherche à classifier les autres pixels dans l'une de ces classes. [DHK14] utilise le classifieur du plus proche voisin où la distance entre deux points p et p' est la variation totale du chemin minimiseur de la TV parmi tous les chemins de p vers p' (voir l'équation (2)). L'arbre des formes permet un calcul rapide

de cette distance en sommant les variations le long des chemins de S_p et $S_{p'}$ jusqu'à leur ancêtre commun. Par conséquent, au lieu de travailler au niveau du pixel, la classification peut-être faite de façon équivalente sur l'arbre des formes en calculant les zones d'influence des formes marquées. Avec l'arbre des formes couleur, un nœud peut contenir des pixels de différentes couleurs, par conséquent on considère que la distance entre une forme et son parent est simplement la distance l_2 entre les couleurs moyennes des nœuds.

La méthode est illustrée sur la figure 9. Un avantage de celle-ci réside dans son aptitude à segmenter de larges régions d'intérêt avec peu de marqueurs là où les méthodes statistiques nécessitent de plus larges marqueurs pour un meilleur apprentissage. Nous n'avons pas montré les résultats de l'arbre des formes calculé sur la luminance seule mais on observe les mêmes problèmes (et donc les mêmes remarques) que lors de la simplification.

5. Conclusion

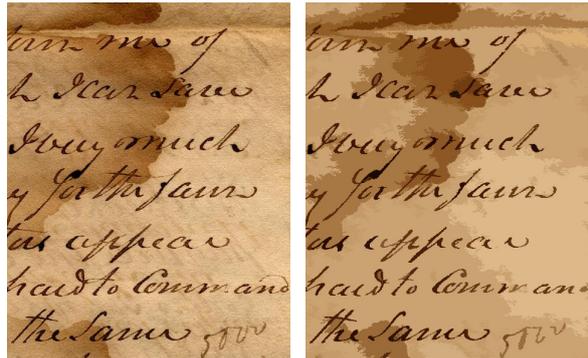
Nous avons présenté une méthode qui étend l'arbre des formes sur les images multivariées. Contrairement aux approches standard, notre arbre des formes



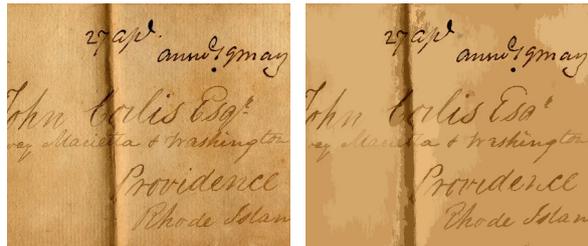
(a) 285 sur 113k lignes de niveaux sélectionnées



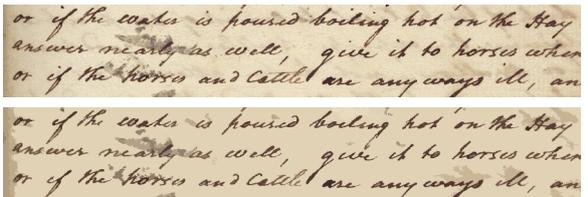
(b) 112 sur 727k lignes de niveaux sélectionnées



(c) 143 sur 162k lignes de niveaux sélectionnées



(d) 112 sur 288k lignes de niveaux sélectionnées



(e) 161 sur 194k lignes de niveaux sélectionnées

Figure 8: Simplification sur des images de document.

couleur s'affranchit du choix d'un ordre total sur ces données et repose uniquement sur la relation d'inclusion entre les formes. Elle produit ainsi un arbre qui est invariant par changement et inversion de contraste marginal de l'image. Au long de ce papier, nous avons tenté de mettre en évidence en quoi ces propriétés sont fondamentales en traitement d'images et en vision par ordinateur. Nous l'avons illustré à travers des applications de simplification et de segmentation montrant des résultats déjà prometteurs et mettant ainsi en avant la versatilité et le potentiel de notre arbre des formes couleur.

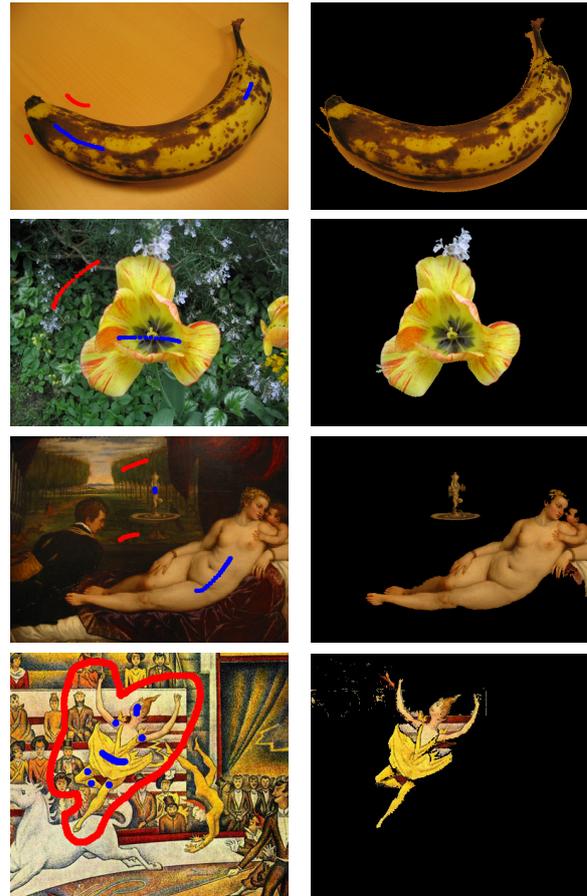


Figure 9: Segmentation interactive avec l'arbre des formes couleur. La colonne de gauche montre les images d'origine et les marqueurs. La colonne de droite montre la segmentation.

Références

- [AL07] APTOULA E., LEFÈVRE S. : A comparative study on multivariate mathematical morphology. *Pattern Recognition*. Vol. 40, Num. 11 (2007), 2914–2929.
- [Bar76] BARNETT V. : The ordering of multivariate data. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*. Vol. 139, Num. 3 (1976), 318–355.
- [BCIG07] BALLESTER C., CASELLES V., IGUAL L., GARRIDO L. : Level lines selection with variational models for segmentation and encoding. *Journal of Mathematic Imaging and Vision*. Vol. 27 (2007), 5–27.
- [CCM99] CASELLES V., COLL B., MOREL J.-M. : Topographic maps and local contrast changes in natural images. *International Journal of Computer Vision*. Vol. 33, Num. 1 (1999), 5–27.
- [CCM02] CASELLES V., COLL B., MOREL J.-M. : Geometry and color in natural images. *Journal of Mathematic Imaging and Vision*. Vol. 16, Num. 2 (2002), 89–105.

- [CF00] COLL B., FROMENT J. : Topographic maps of color images. In *Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition (ICPR)* (2000), vol. 3, pp. 609–612.
- [CG14a] CARLINET E., GÉRAUD T. : Getting a morphological tree of shapes for multivariate images : Paths, traps and pitfalls. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)* (Paris, France, 2014), pp. 615–619.
- [CG14b] CARLINET E., GÉRAUD T. : A morphological tree of shapes for color images. In *Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition (ICPR)* (Stockholm, Sweden, août 2014), pp. 1132–1137.
- [CM09] CASELLES V., MONASSE P. : *Geometric Description of Images as Topographic Maps*, vol. 1984 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 2009.
- [CMS05] CAO F., MUSÉ P., SUR F. : Extracting meaningful curves from images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Vol. 22, Num. 2-3 (2005), 159–181.
- [DHK14] DUBROVINA A., HERSHKOVITZ R., KIMMEL R. : Image editing using level set trees. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)* (2014). to appear.
- [DK01] DIBOS F., KOEPLER G. : Total variation minimization by the Fast Level Sets Transform. In *IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision* (2001), IEEE Computer Society, pp. 179–185.
- [GCCN13] GÉRAUD T., CARLINET E., CROZET S., NAJMAN L. : A quasi-linear algorithm to compute the tree of shapes of n -D images. In *Proceedings of International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)* (2013), Hendriks C. L., Borgefors G., Strand R., (Eds.), vol. 7883 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 98–110.
- [Hei96] HEIJMANS H. J. A. M. : Self-dual morphological operators and filters. *Journal of Mathematic Imaging and Vision*. Vol. 6, Num. 1 (1996), 15–36.
- [LCE*09] LEZORAY O., CHARRIER C., ELMOATAZ A., ET AL. : Rank transformation and manifold learning for multivariate mathematical morphology. In *Proc. of European Signal Processing Conference* (2009), vol. 1, pp. 35–39.
- [LME05] LEZORAY O., MEURIE C., ELMOATAZ A. : A graph approach to color mathematical morphology. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Signal Processing and Information Technology* (2005), IEEE, pp. 856–861.
- [NP09] NAEGEL B., PASSAT N. : Component-trees and multi-value images : A comparative study. In *Proceedings of International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)* (2009), vol. 5720 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 261–271.
- [NP13] NAEGEL B., PASSAT N. : Towards connected filtering based on component-graphs. In *Proceedings of International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)* (2013), vol. 7883 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 353–364.
- [PLCS10] PERRET B., LEFÈVRE S., COLLET C., SLEZAK E. : Connected component trees for multivariate image processing and applications in astronomy. In *Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition (ICPR)* (août 2010), pp. 4089–4092.
- [PN09] PASSAT N., NAEGEL B. : An extension of component-trees to partial orders. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)* (2009), IEEE Press, pp. 3933–3936.
- [Soi05] SOILLE P. : Beyond self-duality in morphological image analysis. *Image and Vision Computing*. Vol. 23, Num. 2 (2005), 249–257.
- [SS95] SALEMBIER P., SERRA J. : Flat zones filtering, connected operators, and filters by reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*. Vol. 4, Num. 8 (1995), 1153–1160.
- [TW12] TUSHABE F., WILKINSON M. H. F. : Color processing using max-trees : A comparison on image compression. In *Proc. of International Conference on Systems and Informatics (ICSAI)* (2012), IEEE, pp. 1374–1380.
- [VFA11] VELASCO-FORERO S., ANGULO J. : Supervised ordering in \mathcal{R}_p : Application to morphological processing of hyperspectral images. *IEEE Transactions on Image Processing*. Vol. 20, Num. 11 (2011), 3301.
- [VFA12] VELASCO-FORERO S., ANGULO J. : Random projection depth for multivariate mathematical morphology. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*. Vol. 6, Num. 7 (2012), 753–763.
- [XGMN14] XU Y., GÉRAUD T., MONASSE P., NAJMAN L. : Tree-based morse regions : A topological approach to local feature detection. *IEEE Transactions on Image Processing* (2014). to appear.
- [XGN12] XU Y., GÉRAUD T., NAJMAN L. : Context-based energy estimator : Application to object segmentation on the tree of shapes. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)* (2012), pp. 1577–1580.
- [XGN13a] XU Y., GÉRAUD T., NAJMAN L. : Salient level lines selection using the Mumford-Shah functional. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)* (2013), pp. 1227–1231.
- [XGN13b] XU Y., GÉRAUD T., NAJMAN L. : Two applications of shape-based morphology : Blood vessels segmentation and a generalization of constrained connectivity. In *Proceedings of International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM)* (2013), Hendriks C. L., Borgefors G., Strand R., (Eds.), vol. 7883 de *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 390–401.