Une généralisation du bien-composé à la dimension n.

N. Boutry[1,2], Thierry Géraud[1], et Laurent Najman[2]

[1]EPITA Research and Development Laboratory (LRDE)
[2]Université Paris-Est, LIGM, Équipe A3SI, ESIEE

Résumé

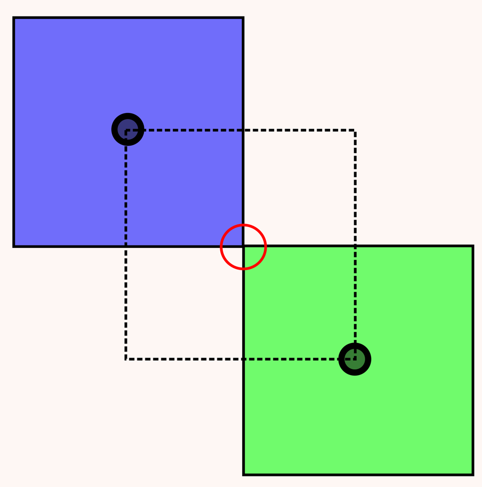
La notion de *bien-composé* a été introduite par Latecki en 1995 pour les ensembles et les images 2D et pour les ensembles 3D en 1997. Les images binaires bien-composées disposent d'importantes propriétés topologiques. De plus, de nombreux algorithmes peuvent tirer avantage de ces propriétés topologiques. Jusqu'à maintenant, la notion de bien-composé n'a pas été étudiée en dimension n, avec $n > 3$. Dans le travail présenté ici, nous généralisons la caractérisation des ensembles et des images bien-composés à la dimension n. Aussi nous démontrons le théorème fondamental de l'équivalence des connexités pour un ensemble bien-composé.

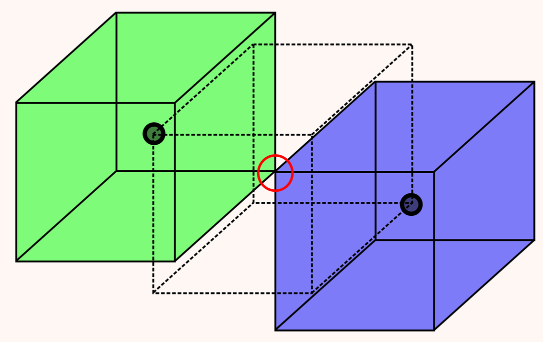
Etat de l'art sur les *ensembles bien-composés* [LER95], [Lat97], [Gér13]

Un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ est dit *bien-composé* ssi il est localement 4-connexe. De façon équivalente, un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^2$ est bien-composé ssi il ne contient pas de configurations critiques de dimension 2.

Un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ est dit *bien-composé* ssi le *contour de son analogue continu* est localement homéomorphe à une sphère. De façon équivalente, un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^3$ est bien-composé ssi il ne contient pas de configurations critiques de dimension 2 ou de dimension 3.

Finalement, un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ est dit *bien-composé* ssi il ne contient pas de configurations critiques de dimension k, $k \in [2, n]$.





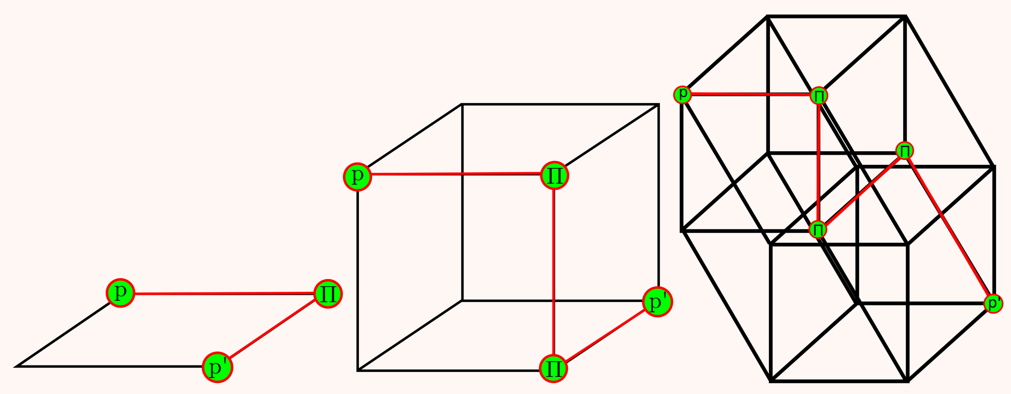
On propose une caractérisation pour identifier les ensembles bien-composés en dimension n

Théorème

Un ensemble $X \subseteq \mathbb{Z}^n$ est bien-composé ssi pout tout couple d'antagonistes (p, p') tous deux dans X, il existe un 2n-chemin les joignant dans $X \cap \mathcal{B}(p, p')$ et si pour tout couple d'antagonistes (p, p') tous deux dans X^c, il existe un 2n-chemin les joignant dans $X^c \cap \mathcal{B}(p, p')$.

Corollaire

Pour tout ensemble bien-composé $X \subseteq \mathbb{Z}^n$, toutes les connexités sont équivalentes.



Etat de l'art sur les *images bien-composées* [LER95], [Gér13], [BGN14]

Les *coupes* d'une image sont définies de la façon suivante :
$[u > \lambda] = \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) > \lambda\}$, $[u < \lambda] = \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) < \lambda\}$, $[u \geq \lambda] = \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) \geq \lambda\}$, $[u \leq \lambda] = \{x \in \mathcal{D} \mid u(x) \leq \lambda\}$.
Une image $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est dite *bien-composée* ssi toutes ses coupes sont bien-composées.

Autrement dit, une image $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est bien-composée ssi en tout bloc $S \subseteq \mathcal{D}$, sa restriction y valant $u|_S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a la relation :

$$\mathrm{intvl}(a, d) \cap \mathrm{intvl}(b, c) \neq \emptyset.$$

Théorème de caractérisation d'une image nD bien-composée

Soit $u : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{Z}^n \mapsto \mathbb{R}$ une image réelle. u est bien-composée ssi $\forall k \in [2, n]$, $\forall S_k \in \mathcal{B}(\mathcal{D})$, $\forall p \in S_k, \forall p' \in S_k$ tel que $p' = \mathrm{antag}_{S_k}(p)$, la relation suivante est vérifiée :

$$\mathrm{intvl}(u(p), u(p')) \cap \mathrm{span}\{u(p'') \mid p'' \in S_k \setminus \{p, p'\}\} \neq \emptyset.$$

[BGN14] Boutry N., Géraud T., Najman L.:
On making n-D images well-composed by a self-dual local interpolation.
In *Discrete Geometry for Computer Imagery* (2014), vol. 8668 de *Lecture Notes in Computer Science Series*, Springer, pp. 320–331.

[Gér13] Géraud T.:
Self-duality and discrete topology: Links between the morphological tree of shapes and well-composed gray-level images.
Journée du Groupe de Travail de Géométrie Discrète, June 2013.

[Lat97] Latecki L.:
3D well-composed pictures.
Graphical Models and Image Processing. Vol. 59, Num. 3 (May 1997), 164–172.

[LER95] Latecki L., Eckhardt U., Rosenfeld A.:
Well-composed sets.
Computer Vision and Image Understanding. Vol. 61, Num. 1 (January 1995), 70–83.