Analyse Spectrale Haute Résolution Tridimensionnelle: Nouvelle méthode d'estimation des fréquences 3D

Y. CHAWKI[1], M. OUANAN[2] et B. AKSASSE[3]

Université Moulay Ismail, Faculté des Sciences et Techniques

Equipe ASIA, Département d'Informatique

BP 509 Boutalamine, Errachidia Maroc

[1] youness.chawki@gmail.com
[2] ouanan_mohammed@yahoo.fr
[3] baksasse@yahoo.com

Résumé

Le présent travail se situe dans le cadre de l'Analyse Spectrale appliquée aux signaux multidimensionnels. Nous allons traiter en particulier les méthodes dites à Haute Résolution connues par leurs performances et leurs précisions type la méthode ESPRIT-3D (Estimation of Signal Parameters via Rotationnal Invariance Techniques), la méthode MEMP (Matrix Enhancement and Matrix Pencil) et la méthode ACMP (Algebricaly Coupled Matrix Pencil). Dans ces méthodes, il se pose généralement le problème de la formation des paires ou des triplets de fréquences soit pour les signaux 2D ou bien pour les signaux 3D respectivement. Dans ce travail, on va proposer une nouvelle méthode d'analyse spectrale haute résolution type ESPRIT-3D. Cette dernière permet de remédier au problème des multiples triplets de la méthode ESPRIT-3D. Cette nouvelle technique sera testée sur une somme d'exponentielles complexes 3D (SEC3D) noyée dans un bruit additif gaussien blanc avec différentes valeurs de SNR.

Mots clefs

Analyse Spectrale, Haute Résolution, ESPRIT-3D, MEMP, ACMP, Matrice d'autocorrélation.

1 Introduction

L'estimation des paramètres d'un modèle reste un problème qui s'impose dans la modélisation des signaux par une somme d'exponentielles complexes 3D (modèle SEC3D) perturbées par un bruit blanc gaussien additif. En effet, cette modélisation est utilisée dans plusieurs applications telles que les télécommunications, le traitement d'antenne, l'analyse de l'image par résonance ou encore le traitement d'image sismique ou médicales.

Le passage de 1D en 2D ou de 2D en 3D n'est pas trivial et certains problèmes qui ne se posent pas dans le cas 1D surgissent et ils méritent d'être traités car en 1D on n'a qu'une seule composante alors que en 2D et 3D on a deux composantes et trois composantes respectivement, on parle ici de l'appariement ou encore la formation des paires fréquentielles ou des triplets fréquentiels. Les méthodes d'analyse spectrale haute résolution peuvent être scindées en deux grandes familles: la première regroupe les méthodes qui restituent l'information spectrale par le biais d'une fonctionnelle dépendant d'un vecteur fréquentiel, il s'agit des méthodes dites du pseudo-spectre ou de balayage. Dans la deuxième classe, les méthodes exploitent la structure matricielle inhérente au modèle SEC3D. Elle propose une phase d'estimation relative aux triplets fréquentiels contenus dans le modèle, ces méthodes sont dites analytiques. Pour ces dernières méthodes, elles utilisent la propriété de l'invariance du modèle. En effet, MEMP [1] [2] utilise la structure Toeplitz de la matrice de covariance. La formation des triplets ou l'appariement est nécessaire et la projection sur le sous-espace signal permet de s'affranchir de ce problème. L'avantage de cette méthode réside dans la précision de l'estimation (consistance). Une seconde approche est présentée en considérant le SEC3D comme une forme matricielle, c'est la méthode ACMP [3] qui offre l'avantage d'estimer simultanément les composantes fréquentielles de chaque dimension. L'ACMP offre un appariement automatique mais souffre du biais des triplets ainsi estimés. ESPRIT-2D [4] [5] est une méthode qui permet de combiner les avantages de ces deux méthodes (MEMP et ACMP). Dans le cas des signaux 3D, une nouvelle méthode haute résolution type ESPRIT-3D est proposée pour améliorer et remédier au problème de la formation des triplets s'il s'agit des multiples.

Dans ce travail, on va étudier dans la deuxième section le model signal SEC3D puis on traitera la matrice d'autocorrélation 3D dans la troisième section. Dans la quatrième section, on étudiera les méthodes MEMP et ESPRIT-3D ainsi que la nouvelle méthode proposée. La cinquième section sera consacrée aux résultats de simulation des méthodes et leurs comparaisons. Finalement, on terminera notre travail par une conclusion et perspectives.

2 Formulation de problème

2.1 Model du signal SEC3D

Considérons que chaque voxel y(m, n, t) de bloc d'image observée correspond à la somme de deux termes:

$$y(m,n,t) = x(m,n,t) + b(m,n,t) \quad (1)$$

Avec $1 \le m \le M$, $1 \le n \le N$ et $1 \le t \le T$

Le signal utile $x(m,n,t)$ est modélisé de la façon suivante:

$$x(m,n,t) = \sum_{i=1}^{K} a_i \exp(j2\pi(f_{1i}m + f_{2i}n + f_{3i}m) + j\varphi_i) \quad (2)$$

- Les K composantes du signal sont définies par les triplets fréquentielles $\{f_{1i}, f_{2i}, f_{3i}\}$, les amplitudes $\{a_i\}$ et les phases $\{\varphi_i\}$.

- $b(m,n,t)$ est un bruit blanc, gaussien, centré de variance σ_b^2.

Notre objectif est, étant donné un bloc $M \times N \times T$, comment estimer les triplets $\{f_{1i}, f_{2i}, f_{3i}\}$ où i=1…..K.

2.2 La matrice d'autocorrélation

Considérons $P \times Q \times L$ un sous-bloc du bloc de donnée $M \times N \times T$.

Le but est de calculer la matrice d'autocorrélation de ces données $P \times Q \times L$. Pour cela, on fait la concaténation les données dans un vecteur colonne $PQL \times 1$ noté Y_{PQL}. Donc pour balayer tout le bloc 3D, on fait une lecture colonne par colonne dans chaque plan du volume comme suit:

$$Y_{PQL}^T = [y_0^T, y_1^T, ..., y_{L-1}^T] \quad (3)$$

Où:

$$y_i^T = [y_{0,i}^T, y_{1,i}^T, ..., y_{Q-1,i}^T] \quad (4)$$

$$y_{j,i}^T = [y(m,n+j,t+i), ..., y(m+P-1,n+j,t+i)] \quad (5)$$

Avec: $i = 0,1,...,L-1$ et $j = 0,1,...,Q-1$

Donc la matrice d'autocorrélation est donnée par:

$$R = E[Y_{PQL} Y_{PQL}^H] \quad (6)$$

Avec :

- E : l'opérateur espérance mathématique.
- H : l'opérateur Hermitien.

La décomposition de la matrice d'autocorrélation en éléments propres est:

$$R = UDU^{-1} \quad (7)$$

Où D est la matrice diagonale des valeurs propres, et les colonnes de U sont les vecteurs propres associés. Les vecteurs propres associés aux valeurs propres principales engendrent le sous-espace signal noté U_s. Le reste engendre le sous-espace bruit U_b.

R est la matrice block Toeplitz $L \times L$ donnée par:

$$R = \begin{bmatrix} R_0 & R_{-1} & ... & R_{-L+1} \\ R_1 & R_0 & ... & R_{-L+2} \\ . & . & . & . \\ R_{L-1} & R_{L-2} & ... & R_0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Dans laquelle chaque block est une matrice bloc Toeplitz $Q \times Q$:

$$R_i = \begin{bmatrix} r_{0,i} & r_{-1,i} & ... & r_{-Q+1,i} \\ r_{1,i} & r_{0,i} & ... & r_{-Q+2,i} \\ . & . & . & . \\ r_{Q-1,i} & r_{Q-2,i} & ... & r_{0,i} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Et enfin $r_{j,i}$ est une matrice Toeplitz $P \times P$ donnée par:

$$r_{j,i} = \begin{bmatrix} r_y(0,j,i) & r_y(-1,j,i) & \dots & r_y(-P+1,j,i) \\ r_y(1,j,i) & r_y(0,j,i) & \dots & r_y(-P+2,j,i) \\ . & . & \dots & . \\ r_y(P-1,j,i) & r_y(P-2,j,i) & & r_y(0,j,i) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Où $r_y(.,.,.)$ est la fonction d'autocorrélation définie par:

$$r_y(k,l,s) = \sum_{i=1}^{K} a_i \exp(j2\pi(f_{1i}k + f_{2i}l + f_{3i}s)) + \sigma_b^2 \delta(k,l,s) \quad (11)$$

La matrice d'autocorrélation peut s'écrire aussi de cette manière:

$$R = S^1_{[PQL,K]} \Psi S^{1H}_{[PQL,K]} + \sigma_b^2 I \quad (12)$$

Avec:

- $S^1_{[PQL,K]}$ la matrice de Vandermonde 3D dont l'expression est:

$$S^1_{[PQL,K]} = [s_{31,L} \otimes s_{21,Q} \otimes s_{11,P}, \dots, s_{3K,L} \otimes s_{2K,Q} \otimes s_{1K,P}] \quad (13)$$

Où

$$s_{mn,A} = [1 \quad exep(j2\pi f_{mn}) \quad \dots \quad \exp(j2\pi f_{mn}(A-1))]^T \quad (14)$$

Avec:

- $m = 1,2,3; \quad n = 1,2,\dots,K; \quad A = P,Q,L$
- $\otimes$: Le produit de Kronecker.
- Ψ : La matrice diagonale contenant les carrés des amplitudes.

$$\Psi = \underset{1 \le i \le K}{diag}(a_i^2) \quad (15)$$

2.3 Rappel sur les méthodes d'estimation haute résolution

2.3.1 La méthode MEMP

Le développement de la méthode MEMP est basé sur l'étude de la structure matricielle de la matrice d'autocorrélation (12). Donc, pour une lecture colonne par colonne.

Les sous-espaces engendrés par les colonnes de la matrice de Vandermonde 3D et par les vecteurs propres du sous-espace signal contenus dans la matrice U_{s1} sont identique.

Il existe donc une matrice inversible Θ_1 de rang K telle que:

$$U_{s1} = S^1_{[PQL,K]} \Theta_1 \quad (16)$$

La matrice de Vandermonde 3D peut s'écrire en fonction des matrices de Vandermonde 2D $S^1_{[PQL,K]}$; en effet:

$$S^1_{[PQL,K]} = \begin{bmatrix} S^1_{[PQ,K]} \\ S^1_{[PQ,K]}\Phi_3 \\ . \\ S^1_{[PQ,K]}\Phi_3^{L-1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Avec:

$$\Phi_3 = \underset{1 \le i \le K}{diag}(\exp(j2\pi f_{3i})) \quad (18)$$

$S^1_{[PQ,K]}$ peut s'écrire en fonction de la matrice de Vandermonde 1D $S^1_{[P,K]}$:

$$S^1_{[PQ,K]} = \begin{bmatrix} S^1_{[P,K]} \\ S^1_{[P,K]}\Phi_2 \\ . \\ S^1_{[P,K]}\Phi_2^{Q-1} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Avec :

$$S^1_{[P,K]} = [s_{11,P} \quad s_{12,P} \quad \dots \quad s_{1K,P}] \quad (20)$$

$$\Phi_2 = \underset{1 \le i \le K}{diag}(\exp(j2\pi f_{2i})) \quad (21)$$

Or la propriété de l'invariance s'exprime au niveau de la matrice, $S^1_{[PQL,K]}$ donc on peut expliciter deux partitionnements distincts relatifs à une matrice EM1 :

$$S^1_{[PQL,K]} = \begin{bmatrix} S^1_{[PQ,K]} \\ ---- \\ EM1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow PQ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} EM1\Phi_3^{-1} \\ ---- \\ S^1_{[PQ,K]}\Phi_3^{L-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \updownarrow PQ \end{matrix} \quad (22)$$

En appliquant ces dernières relations à l'équation (16), on aura:

$$U_{S1} = \begin{bmatrix} xxx \\ ------ \\ \overline{U}_{S1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow PQ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_{S1} \\ ------ \\ xxx \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \updownarrow PQ \end{matrix} \quad (23)$$

$$= \begin{bmatrix} S^1_{[PQ,K]} \\ ------ \\ EM1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow PQ \\ \\ \\ \end{matrix} \Theta_1 = \begin{bmatrix} EM1\Phi_3^{-1} \\ ------ \\ S^1_{[PQ,K]}\Phi_3^{L-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \updownarrow PQ \end{matrix} \Theta_1$$

Donc:

$$\begin{cases} EM1\Theta_1 = \overline{U}_{S1} \\ EM1\Phi_3^{-1}\Theta_1 = \underline{U}_{S1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} EM1 = \overline{U}_{S1}\Theta_1^{-1} \\ \overline{U}_{S1}\Theta_1^{-1}\Phi_3^{-1}\Theta_1 = \underline{U}_{S1} \end{cases} \Rightarrow \Theta_1^{-1}\Phi_3^{-1}\Theta_1 = \overline{U}_{S1}^{\dagger}\underline{U}_{S1} \quad (24)$$

Où † est la pseudo inverse.

La matrice Θ_1 est inversible, on trouve finalement l'égalité suivante :

$$F_3 = (\overline{U}_{S1})^{\dagger}\underline{U}_{S1} = \Theta_1^{-1}\Phi_3^{-1}\Theta_1 \quad (25)$$

Pour avoir les fréquences du premier axe spatial, on doit faire une lecture ligne par ligne à la matrice de Vandermonde 3D, et en suivant les mêmes étapes que précédemment et commuter les produit de Kronecker contenus dans $S^1{}_{[PQL,K]}$, on aura donc les relations suivantes:

$$U_{S2} = S^2_{[PQL,K]}\Theta_2 \quad (26)$$

$$S^2_{[PQL,K]} = E_1^2 S^1_{[PQL,K]} \quad (27)$$

$$U_{S2} = E_1^2 U_{S1} \quad (28)$$

Où

$$E_1^2 = \sum_{i=1}^{P}\sum_{j=1}^{Q}\sum_{k=1}^{L} E_{i,j}^{PQ} \otimes E_{j,k}^{QL} \otimes E_{k,i}^{LP} \quad (29)$$

Et $E_{k,l}^{QP}$ est la matrice de permutation élémentaire de taille PxQ ayant la valeur 1 pour les coordonnées (k, l,) et zéros ailleurs.

La matrice Θ_2 est inversible, on trouve finalement l'égalité suivante :

$$F_1 = (\overline{U}_{S2})^{\dagger}\underline{U}_{S2} = \Theta_2^{-1}\Phi_1^{-1}\Theta_2 \quad (30)$$

Pour avoir les fréquences du second axe spatial, on doit faire une lecture hauteur par hauteur à la matrice de Vandermonde 3D, en suivant les mêmes étapes que précédemment et commuter les produit de Kronecker contenus dans $S^3{}_{[PQL,K]}$, on aura donc les relations suivantes:

$$U_{S3} = S^3_{[PQL,K]}\Theta_3 \quad (31)$$

$$S^3_{[PQL,K]} = E_2^3 S^2_{[PQL,K]} \quad (32)$$

Où

$$U_{S3} = E_2^3 U_{s2} \quad (33)$$

$$E_2^3 = \sum_{i=1}^{Q}\sum_{j=1}^{L}\sum_{k=1}^{P} E_{i,j}^{QL} \otimes E_{j,k}^{LP} \otimes E_{k,i}^{PQ} \quad (34)$$

La matrice Θ_3 est inversible, on trouve finalement l'égalité suivante:

$$F_2 = (\overline{U}_{S3})^{\dagger}\underline{U}_{S3} = \Theta_3^{-1}\Phi_2^{-1}\Theta_3 \quad (35)$$

Jusqu'à présent, les composantes des fréquences 3D sont estimées, mais elles ne sont pas associées dans la bonne forme. À cette fin, nous utilisons la propriété d'orthogonalité entre le sous-espace bruit et la matrice de Vandermonde 3D.
Les meilleurs triplets maximisent la projection sur le sous-espace signal selon le critère suivant:

$$C(i,j,k) = \sum_{l=1}^{K}\left\| U_{S1}^{H}(l)(s_{3k,L} \otimes s_{2j,Q} \otimes s_{1i,P}) \right\|^2 \quad (36)$$

2.3.2 La méthode ESPRIT-3D

La méthode ESPRIT-3D parvient à combiner les avantages de la méthode MEMP et celles de la méthode ACMP. En effet, ESPRIT-3D offre une précision comparable à celle de MEMP et aussi en réformant les paires fréquentielle d'une manière automatique que celle d'ACMP.

ESPRIT-3D utilise les relations (25), (30) et (35) :

$$\begin{cases} F_3 = (\overline{U}_{S1})^{\dagger}\underline{U}_{S1} = \Theta_1^{-1}\Phi_3^{-1}\Theta_1 \\ F_1 = (\overline{U}_{S2})^{\dagger}\underline{U}_{S2} = \Theta_2^{-1}\Phi_1^{-1}\Theta_2 \\ F_2 = (\overline{U}_{S3})^{\dagger}\underline{U}_{S3} = \Theta_3^{-1}\Phi_2^{-1}\Theta_3 \end{cases} \quad (37)$$

ESPRIT-3D exploite une propriété supplémentaire: F_1, F_2 et F_3 sont diagonalisables par la même transformation, c.-à-d.:

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 \quad (38)$$

Ce qui montre que Θ diagonalise F_1, F_2 et F_3 et elle se calcule à partir de la relation suivante:

$$F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + (1-(\alpha_1+\alpha_2))F_3 = \Theta^{-1}\Delta\Theta \quad (39)$$

Où α_1 et α_2 sont des scalaires.
En appliquant la transformation Θ aux matrices F_1, F_2 et F_3, les fréquences extraites sont des diagonales de Φ_1, Φ_2 et Φ_3.

$$\begin{cases} \Phi_1 = \Theta F_1 \Theta^{-1} \\ \Phi_2 = \Theta F_2 \Theta^{-1} \\ \Phi_3 = \Theta F_3 \Theta^{-1} \end{cases} \quad (40)$$

2.3.2 *La méthode ESPRIT-3D améliorée*

La méthode ESPRIT-3D reste une méthode d'estimation fréquentielle efficace surtout qu'elle forme les triplets d'une manière automatique et aussi précise. Mais pour certains cas elle forme des triplets erronés; et en particuliers s'il s'agit des multiples.
Pour remédier à ce problème, on va proposer une nouvelle méthode d'estimation haute résolution type ESPRIT-3D. En effet, après avoir déterminé les matrices F_1, F_2 et F_3, on passe à l'étape de la diagonalisation mais cette fois-ci ce n'est pas avec la matrice Θ. Mais cette dernière matrice sera un outil pour former trois autres matrices de permutation P_1, P_2 et P_3 dont leurs expressions sont:

$$\begin{cases} P_1 = \Theta^{-1}\Theta_1 \\ P_2 = \Theta^{-1}\Theta_2 \\ P_3 = \Theta^{-1}\Theta_3 \end{cases} \quad (41)$$

Finalement les fréquences classées de manière correctes s'obtiennent à partir des matrices suivantes:

$$\begin{cases} \Phi_1' = P_1^{-1}\Phi_1 P_1 \\ \Phi_2' = P_2^{-1}\Phi_2 P_2 \\ \Phi_3' = P_3^{-1}\Phi_3 P_3 \end{cases} \quad (42)$$

3 Expérimentations

3.1 Exemples de Simulation

Dans cette section, on présente quelques exemples numériques; notre approche est testée sur un model SEC3D. Les données sont générées en fonction du modèle de l'équation (1). On considère trois modes c.à.d. K=3 avec l'amplitude a_i=1, les fréquences 3D sont données dans le tableau I. Les données et les tailles de la matrice d'autocorrélation sont respectivement $(M,N,T) = (16,16,16)$, et $(P,Q,L) = (5,5,5)$. On va considérer les valeurs de rapport signal sur bruit SNR=0dB et SNR=20dB.

TABLEAU 1

Fréquence 3D utilisées pour les exemples de simulation

	f_{1i}	f_{2i}	f_{3i}
1^er^ mode	0.11	0.14	0.17
2° mode	0.24	0.23	0.21
3° mode	0.45	0.48	0.47

TABLEAU II

Estimation des fréquences par MEMP, ESPRIT-3D et ESPRIT-3D améliorée pour SNR=0 dB et SNR=20 dB

			1er mode	2° mode	3° mode
MEMP	f_{1i}	0 dB	0.1090	0.2386	0.4495
		20 dB	0.1100	0.2400	0.4499
	f_{2i}	0 dB	0.1380	0.2284	0.4806
		20 dB	0.1400	0.2300	0.4800
	f_{3i}	0 dB	0.1706	0.2093	0.4703
		20 dB	0.1700	0.2101	0.4699
ESPRIT-3D	f_{1i}	0 dB	0.1095	0.2402	0.4489
		20 dB	0.1098	0.2401	0.4501
	f_{2i}	0 dB	0.1406	0.2289	0.4800
		20 dB	0.1399	0.2299	0.4799
	f_{3i}	0 dB	0.1697	0.2091	0.4702
		20 dB	0.1700	0.2100	0.4699
ESPRIT-3D améliorée	f_{1i}	0 dB	0.1110	0.2409	0.4489
		20 dB	0.1100	0.2400	0.4500
	f_{2i}	0 dB	0.1404	0.2307	0.4801
		20 dB	0.1400	0.2299	0.4799
	f_{3i}	0 dB	0.1700	0.2101	0.4715
		20 dB	0.1699	0.2100	0.4700

3.2 Commentaire

La formation des triplets ou encore le problème d'appariement reste un des problèmes majeurs qui s'imposent lors du passage de 2D en 3D. En effet, ce problème est bien concret lorsqu'il s'agit des multiples, et donc les triplets formés ne sont pas corrects. Dans le tableau II les résultats obtenus montrent bien cela. On peut bien voir que la nouvelle méthode proposée a bien estimé les fréquences par rapport à la méthode MEMP et la méthode ESPRIT-3D. Les résultats donnés par la nouvelle méthode proposée sont très proche des vraies valeurs. Cela montre que cette méthode est plus efficace et plus précise par rapport à la méthode MEMP et la méthode ESPRIT-3D.

4 Conclusion

Les méthodes d'analyse spectrale à haute résolution sont des méthodes importantes qui permettent de résoudre certains problèmes d'estimation des fréquences et d'appariement. En effet, la méthode ESPRIT-3D permet d'avoir les triplets fréquentiels d'une manière précise et automatique; mais pour le cas des multiples, cette méthode ne donne pas de bons triplets. La nouvelle méthode qu'on a proposée permet de remédier à ce problème.

En termes de perspectives, nous allons essayer de calculer les bornes de Cramer-Rao pour les fréquences estimées en utilisant la nouvelle méthode, nous essayerons également de développer cette technique pour les signaux noyés dans un bruit coloré.

Références

[1] Y. Hua, ''Estimating Two-Dimensional Frequencies by Matrix Enhancement and Matrix Pencel'', IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 40, No 9, September 1997.

[2] B. Aksasse, M. Elansari, Y. Berthomieu, and M. Najim, "High resolution 3-D spectral method estimation", in Proc EUSIPCO 2002, vol. II, pp. 391-394, Sept 03-06,Toulouse, France.

[3] P. Vanpoucke, M. Moonen, Y. Berthoumieu, "An efficient subspace algorithm for 2D harmonic retrieval'', IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, pp. 461-464, 1994.

[4] S. Rouquette, M. Najim, ''Estimation fréquentielle bidimensionnelle par la nouvelle méthode à haute résolution ESPRIT-2D '', seizième colloque GRETSI, 15-19 Septembre, 1997- Grenoble.

[5] Y. Berthoumieu, M. El Ansari, B. Aksasse, M Donias, M. Najim, "A 2-D Robust high resolution frequency estimation approach," Signal Processing, vol. 85, no. 6, pp 1165-1188, June 2005.