

## Amélioration d'un outil d'analyse différentielle de surfaces échantillonnées

Jean-Luc Peyrot

Frédéric Payan

Marc Antonini

Laboratoire I3S, UMR7271 - Université de Nice - Sophia Antipolis - CNRS  
2000 route des Lucioles, Les Algorithmes - bât. Euclide B,  
Sophia Antipolis, France

{peyrot, fpayan, am}@i3s.unice.fr

### Résumé

L'analyse spectrale de maillages surfaciques est très importante pour de nombreux domaines comme la vision par ordinateurs par exemple. Son principal but est d'étudier la distribution des sommets d'un maillage donné (autrement dit l'échantillonnage) par rapport à la surface qu'il représente. Nous proposons dans cet article une amélioration d'un outil d'analyse spectrale pour maillages surfaciques. Cet outil a été développé par Wei et al. [1], et est, à notre connaissance, le seul outil à évaluer des échantillonnages non-uniformes de surfaces. Notre contribution fait évoluer cet outil basé sur l'analyse de domaines différentiels, en incorporant un calcul précis de distances géodésiques, basé sur l'algorithme de Dijkstra [2]. L'intérêt principal est d'affiner l'analyse des maillages ayant de fortes contraintes géométriques comme des saillances, des coins, etc., qui est actuellement biaisée avec l'outil original [1]. Les résultats expérimentaux mettent en avant la validité de notre approche sur des échantillonnages adaptatifs de surfaces CAO complexes.

### Mots clefs

Echantillonnage de surfaces, échantillonnage adaptatif, analyse différentielle, bruit bleu, distance géodésique.

## 1 Introduction

Dans le domaine de la vision par ordinateurs, la numérisation d'objets ou de scènes 3D requiert une attention particulière. En effet, la phase d'échantillonnage associée conditionne la qualité des applications qui seront ensuite réalisées à partir des données acquises. Depuis de nombreuses années, beaucoup de travaux s'intéressent aux échantillonnages en disques de Poisson, qui possèdent des propriétés spectrales intéressantes [3]. Un échantillonnage en disques de Poisson se caractérise par une distribution irrégulière des échantillons sur la surface, mais avec la contrainte que deux échantillons doivent être séparés au minimum d'une distance  $d_{min}$ .

On dit généralement qu'une distribution en disques de Poisson exhibe des caractéristiques de "bruit bleu". En effet, le bruit bleu élimine l'effet d'*aliasing* rencontré lors de la présence de fréquences supérieures à la fréquence de

Nyquist, en le remplaçant par un bruit d'amplitude faible, grâce à l'irrégularité de la grille d'échantillonnage et à la contrainte de distance minimale. Ainsi, beaucoup d'applications se sont intéressées à ce type de distributions comme celles réalisant du rendu 3D [4], du plaquage de textures [5], du calcul géométrique [6, 7], ou encore des simulations numériques [8].

Dans le cas idéal, une telle distribution possède une puissance spectrale moyenne radiale (PSMR ou RAPS en anglais pour *radially averaged power spectrum*) semblable à une fonction échelon, comme illustré sur la Figure 1 au milieu (d'où le nom de bruit bleu) où l'axe des abscisses représente les distances inter-échantillons, et une anisotropie la plus faible possible (Figure 1 à droite). Plus précisément, la PSMR mesure la distribution de probabilité des distances entre les échantillons, et l'anisotropie donne une indication sur une éventuelle direction ou un alignement privilégié des échantillons sur la surface. Ces deux mesures sont obtenues en calculant respectivement, la moyenne et la variance radiale de la puissance spectrale moyenne (Figure 1 à gauche), elle-même obtenue en moyennant les amplitudes au carré des transformées de Fourier d'un ensemble de distributions équivalentes du même modèle.

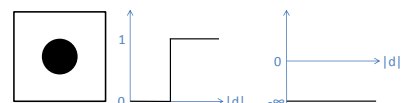


Figure 1 – Propriétés idéales d'une distribution en disques de Poisson, dite de bruit bleu. De gauche à droite : la puissance spectrale moyenne, la puissance spectrale moyenne radiale (PSMR) et l'anisotropie.

L'analyse spectrale des distributions générées lors de l'étape d'échantillonnage est indispensable pour certaines applications qui requièrent de bonnes propriétés spectrales. Dans la suite de l'article, nous détaillons tout d'abord les différentes méthodes de l'état de l'art pour analyser spectralement l'échantillonnage de surfaces. Nous exposons ensuite en détail l'outil d'analyse développé par Wei et al. dans [1]. Puis, nous présentons l'adaptation proposée pour améliorer cet outil, et enfin, nous concluons sur les avantages et les limitations de la méthode proposée.

## 2 Analyse spectrale de surfaces échantillonnées

L'échantillonnage d'une surface correspond à la manière dont les sommets ont été distribués sur celle-ci. Les échantillons sont donc les points sur la surface, et sont définis généralement dans l'espace tridimensionnel.

Il est souvent difficile d'évaluer la qualité des échantillonnages des maillages surfaciques, car l'extension de l'analyse spectrale traditionnelle de Fourier n'est pas triviale.

En 2010, Li *et al.* [9] ont contourné le problème en utilisant une bijection des échantillons d'une distribution anisotrope vers un domaine euclidien uniforme, et ainsi peuvent utiliser l'analyse traditionnelle de Fourier. Cependant, ils se restreignent aux distributions anisotropiques qui ont une possible bijection inversible pour passer d'un domaine à l'autre.

La même année, Bowers *et al.* [10] ont réduit le problème d'analyse de la puissance spectrale en une décomposition en valeurs propres de la matrice Laplacienne. L'une des limitations de cette méthode est que la décomposition doit être effectuée sur un maillage très dense, ce qui augmente sa complexité et rend difficile son utilisation.

Plus récemment, Wei *et al.* [1] ont généralisé l'analyse de Fourier à un noyau générique pour garantir une analyse correcte des distributions : anisotropiques, adaptatives, etc. Pour cela, ils ont développé ce qu'ils ont appelé l'*analyse de domaines différentiels*. Cette méthode est décrite dans la prochaine partie, puisque c'est celle-ci que nous améliorons.

## 3 Analyse de domaines différentiels pour échantillonnages non-uniformes

Ce paragraphe détaille l'outil de Wei *et al.* [1] basé sur l'*analyse de domaines différentiels*. Cette analyse permet de mesurer les propriétés spectrales d'un échantillonnage uniforme ou non-uniforme (souvent appelé adaptatif), telles que la puissance spectrale moyenne radiale (PSMR) et l'anisotropie, qui donnent des indications relativement précises sur la distribution spectrale de la grille d'échantillonnage générée. Cette méthode est adaptée à notre cas, puisque nous nous intéressons aux échantillonnages adaptatifs.

La PSMR représente la moyenne radiale de la densité de probabilité  $p(\mathbf{d})$  des distances inter-échantillons, et donne une information sur la distribution des distances dans le domaine différentiel  $\Omega_d$ . L'anisotropie est la variance de  $p(\mathbf{d})$  et mesure la variabilité de positionnement dans l'espace des échantillons. Elle est ainsi plus élevée si un alignement d'échantillons est trouvé par exemple, indiquant donc que l'échantillonnage n'est pas isotropique.

Wei *et al.* [1] sont partis de la définition de la puissance spectrale de Fourier d'un ensemble de  $N$  échantillons

$\{s_k\}_{k=0}^{N-1}$ , dont la formule est redonnée ci-dessous :

$$P(\mathbf{f}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \cos(2\pi \mathbf{f} \cdot (s_i - s_j)) \quad (1)$$

avec  $\mathbf{f}$  le vecteur d'intérêt, qui n'est autre que la fréquence. De cette formulation, les auteurs proposent de généraliser l'analyse spectrale de Fourier aux cas non-uniformes grâce à la formulation suivante, où la fonction cosinus de l'équation 1 est remplacée par un noyau générique appelé  $K$  :

$$P(\mathbf{q}) = N \times \int_{\Omega_d} K(\mathbf{q}, \chi(s, s', \mathbf{d})p(\mathbf{d}))\delta\mathbf{d} \quad (2)$$

$\mathbf{q}$  est un ensemble de paramètres et de valeurs d'intérêt relatif au noyau  $K$  (la fréquence si on utilise le noyau cosinus lors d'une analyse traditionnelle de Fourier, par exemple), et  $K(\cdot, \cdot)$  est une fonction générique qui pondère le calcul de la puissance spectrale dans le but d'étudier une ou plusieurs propriétés de la distribution.  $\mathbf{d}(\cdot)$  est la fonction différentielle de distances inter-échantillons.  $\Omega_d$  est appelé domaine différentiel pour la fonction  $\mathbf{d}$ . Enfin,  $p(\mathbf{d})$  est la fonction de densité de probabilité sur le domaine différentiel  $\Omega_d$  et  $\chi(s, s', \mathbf{d})$  est la fonction permettant de passer d'une distance dans un domaine non-uniforme à sa correspondance dans un domaine uniforme (de l'adaptatif vers un domaine uniforme par exemple).

Dans le cas général, Wei *et al.* [1] proposent d'utiliser une mesure de distance géodésique afin de ne pas introduire de biais lors de l'analyse de surfaces. Cependant, afin de limiter le temps de calcul, cette méthode ne se focalise que sur l'étude locale des distances entre les échantillons, évitant ainsi le calcul de  $(N - 1)^2$  distances. Un champ d'orientation et une paramétrisation locale qui préserve les angles et les distances locales sont utilisés afin de calculer les distances géodésiques et de s'orienter sur la surface, grâce à la méthode *discrete exponential map* proposée par Schmidt *et al.* [11]. Cet outil fonctionne bien en pratique pour des objets simples, c'est-à-dire relativement lisses et de faibles complexités topologiques ou encore sans arêtes saillantes.

## 4 Amélioration proposée de l'outil

L'inconvénient de l'outil de référence est que la technique *discrete exponential map* [11] utilisée se base sur le principe de plans tangents aux surfaces, centrés sur les échantillons dont on veut connaître la distance. Cette approche n'est pas viable lorsque la surface est complexe, avec de fortes courbures ou avec des zones saillantes par exemple, car les distances géodésiques ainsi calculées sont imprécises et erronées.

L'objectif de nos travaux consistait donc à incorporer une mesure de géodésique plus précise à cet outil - sans être trop complexe - afin d'analyser plus efficacement les propriétés spectrales de surfaces présentant des zones

saillantes, ou avec de très fortes courbures. Cet amélioration est particulièrement intéressante si on analyse des modèles CAO, par exemple.

Pour illustrer ce problème de "mesures" imprécises, on peut remarquer que la PSMR de l'objet AXLE sur le Tableau 5, mesurée par l'outil de référence sur des échantillonnages en disques de Poisson via la technique [12] (en rouge), présente une zone basse fréquence qui n'est pas nulle, laissant penser que des échantillons sont très proches les uns des autres et ne respectent donc pas le critère d'uniformité des distributions en disques de Poisson. Or, ceci est faux puisque la méthode [12] veille à respecter cette contrainte grâce à l'utilisation d'une géodésique relativement précise.

Nous avons donc incorporé la distance géodésique de Dijkstra [2] dans l'outil de référence, comme illustré sur le schéma de la Figure 2. Lors du calcul de la distance séparant deux échantillons  $s_1$  et  $s_2$ , nous demandons à la méthode de paramétrisation locale [11] de fournir le vecteur  $(u, v)$  correspondant à la position de l'échantillon  $s_2$  sur le plan paramétrique centré en l'échantillon  $s_1$ . Ce vecteur représente les coordonnées dites "normales" dans la base paramétrique du plan tangent à  $s_1$ . La norme de ce vecteur est considérée dans l'outil initial, comme la distance géodésique approximée entre  $s_1$  et  $s_2$ , et son orientation angulaire définit l'orientation de  $s_2$  par rapport à  $s_1$  sur la surface. Dans le but de corriger la distance géodésique, nous utilisons une version subdivisée de la maille originale pour acquérir une distance géodésique entre  $s_1$  et  $s_2$  la plus précise possible avec l'algorithme de Dijkstra [2]. Afin de ne pas altérer l'orientation angulaire du vecteur  $(u, v)$ , tout en corrigeant sa norme, nous réalisons une homothétie de centre l'origine de la base paramétrique et de rapport la distance de Dijkstra entre  $s_1$  et  $s_2$  sur la norme de  $(u, v)$ . Ainsi, les distances géodésiques seront plus précises dans les zones particulièrement courbées ou autour des saillances, afin d'obtenir des PSMR et des anisotropies plus fiables.

Le maillage subdivisé, utilisé pour les calculs de géodésiques, est obtenu par subdivision *midpoint*. Cette technique consiste à ajouter au maillage initial un nouveau sommet au milieu de chacune de ses arêtes, et des les relier entre eux, comme illustré sur la figure de gauche du Tableau 1. Ainsi, le calcul de la distance géodésique entre deux échantillons requiert une correspondance entre chaque échantillon et un sommet de cette version subdivisée. La distance ainsi calculée n'est pas la vraie distance géodésique entre les échantillons, mais elle correspond à la distance géodésique entre les deux sommets du maillage subdivisé les plus proches de ces échantillons. Une erreur de quantification est ainsi introduite et est d'autant plus grande que la régularité de la subdivision est élevée. Pour réduire les erreurs de quantification introduites, nous plaçons les nouveaux sommets lors de la subdivision, de façon aléatoire sur chaque arête, ce qui génère un chaos, comme le montre la figure de droite du Tableau 1.

Pour vérifier que ce chaos réduit les erreurs de quantification, nous avons généré un échantillonnage en bruit blanc avec l'algorithme de Wei *et al.* [1], sur un plan uniforme et régulier. Nous présentons les résultats de l'analyse de cet échantillonnage en utilisant le chaos ou pas, lors de la génération du maillage subdivisé sur lequel s'appuient les calculs de géodésiques. Les résultats sont présentés sur les figures du Tableau 2. On constate que l'analyse sans chaos introduit des pics au niveau de la PSMR et de l'anisotropie, révélant la régularité de la grille. Au contraire, l'utilisation du chaos élimine cette régularité et permet de voir les propriétés de bruit blanc de cet échantillonnage, comme attendu.

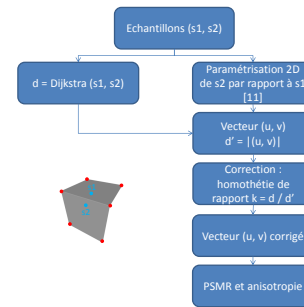


Figure 2 – Schéma illustrant l'adaptation réalisée lors du calcul de la distance géodésique entre deux échantillons  $s_1$  et  $s_2$ .

## 5 Résultats

Le Tableau 3 présente quatre résultats de remaillage obtenus avec la méthode proposée dans [12], et contenant chacun environ mille échantillons.

Nous présentons différents résultats d'analyse obtenus sur plusieurs maillages de complexité et de genre croissants, par moyennage sur plusieurs périodogrammes, afin d'améliorer la lisibilité et l'analyse des PSMR et des anisotropies obtenues. Comme dans [13], nous avons lancé huit fois les algorithmes d'échantillonnage testés. Dans le but de prouver l'avantage de notre approche par rapport à l'outil original, et de mettre en évidence les artefacts générés par celui-ci, nous avons comparé les analyses des échantillonnages générés par la technique de Corsini *et al.* [14] (Tableau 4), la méthode [12] (Tableau 5) et la méthode d'échantillonnage présentée dans [1] (Tableau 6). Pour toutes les méthodes d'échantillonnage analysées, les zones basses fréquences sont rarement plates et de valeurs nulles lorsqu'elles sont évaluées avec l'outil de référence, contrairement aux courbes évaluées avec la technique proposée dans cet article. De plus, les zones de fortes transitions sont améliorées dans tous les cas, grâce à la meilleure approximation des distances géodésiques de notre outil. Concernant l'anisotropie, nous remarquons une diminution pour toutes les méthodes, ce qui montre que les méthodes utilisées sont bien isotropiques.

Dans les figures du Tableau 4, nous pouvons constater que

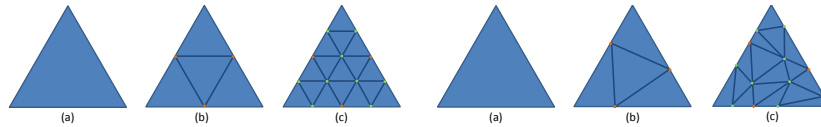


Tableau 1 – Deux itérations de la subdivision midpoint sans (à gauche) et avec (à droite) chaos.

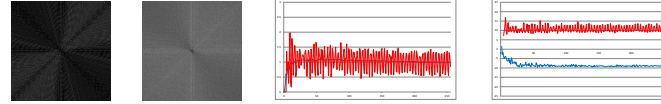


Tableau 2 – Comparaison des analyses obtenues sans chaos (courbes rouges) et avec chaos (courbes bleues) sur une distribution en bruit blanc sur un plan. De gauche à droite : la puissance spectrale moyenne obtenue sans chaos, la puissance spectrale moyenne obtenue avec chaos, les courbes PSNR et les anisotropies correspondantes.

lorsque la complexité des objets n'est pas élevée, (modèles FANDISK et ROCKER ARM), la zone basse fréquence est évaluée comme plate avec ou sans notre adaptation. Par contre, ce n'est pas le cas pour les deux autres maillages de plus forte complexité, indiquant que la méthode [14] ne vérifie pas toujours le critère de distances minimales, même si notre adaptation montre que la zone est plus plate que celle obtenue avec l'outil original. Concernant la méthode [12], les figures du Tableau 5 montrent que l'outil original ne produit pas une zone basse fréquence plate, ce qui est contredit par notre outil. Ceci est logique puisque la méthode [12] vérifie de manière précise la contrainte de distances minimales. On peut aussi voir que les zones hautes fréquences sont plus uniformes, indiquant une meilleure prise en compte de la paramétrisation. Enfin, la méthode [1] présente une PSNR assez similaire avec ou sans notre amélioration dans le cas des deux objets ne possédant pas de nombreuses arêtes saillantes (figures du Tableau 6). Mais pour les objets plus complexes, on voit une différence notable. Ceci peut s'expliquer par le fait que cette méthode tient compte de la courbure lors de l'échantillonnage mais que la paramétrisation utilisée fausse les analyses en biaisant les distances géodésiques.

De plus, pour les trois méthodes d'échantillonnage présentées, les anisotropies mesurées avec notre amélioration diminuent. En effet, l'anisotropie est calculée à partir de la variance de la distribution de distances, et est ensuite normalisée par sa moyenne au carré, afin de comparer de façon fiable les anisotropies entre-elles. Ainsi, deux distributions présentant la même variance, mais pas les mêmes moyennes auront des anisotropies différentes : celle dont la moyenne est la plus élevée sera moins pénalisée par sa valeur de variance, par rapport à celle où les échantillons sont en moyenne plus proches les uns des autres, et aura donc une anisotropie plus faible. Dans le cas de notre amélioration, la moyenne des distributions augmente grâce aux homothéties qui ne modifient que la norme des vecteurs paramétriques, mais pas leurs directions, expliquant ainsi la diminution des anisotropies.

## 6 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté une amélioration d'un outil d'analyse spectrale pour échantillonnages non-uniformes de maillages surfaciques, qui prend en compte les zones de fortes courbures lors du calcul des distances géodésiques. Cependant, l'outil est plus lent à cause du calcul plus précis des géodésiques réalisés sur le maillage subdivisé et s'ajoute donc à la complexité de l'outil initial. Une perspective envisagée sera donc de mener une implémentation parallélisée de l'algorithme pour améliorer les temps de calcul.

### Remerciements

Ce travail de thèse est supporté financièrement par la Région Provence Alpes Côte d'Azur et la société Noomeo (Toulouse).

### Références

- [1] Li-Yi Wei et Rui Wang. Differential domain analysis for non-uniform sampling. Dans *ACM SIGGRAPH 2011 Papers*, 2011.
- [2] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *NUMERISCHE MATHEMATIK*, 1 :269–271, 1959.
- [3] Robert L. Cook. Stochastic sampling in computer graphics. *ACM Transactions on Graphics*, 5 :51–72, 1986.
- [4] Henrik W. Jensen et Juan Buhler. A rapid hierarchical rendering technique for translucent materials. Dans *Proceedings of the 29th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, 2002.
- [5] Ares Lagae et Philip Dutré. A procedural object distribution function. *ACM Transactions on Graphics*, 24 :1442–1461, 2005.
- [6] Diego Nehab et Philip Shilane. Stratified point sampling of 3d models. Dans *Proceedings of the First Eurographics conference on Point-Based Graphics*, 2004.

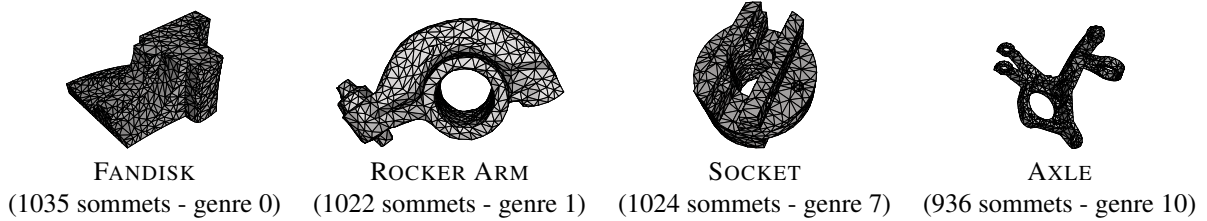


Tableau 3 – Modèles remaillés avec la méthode [12] et contenant environ 1000 échantillons.

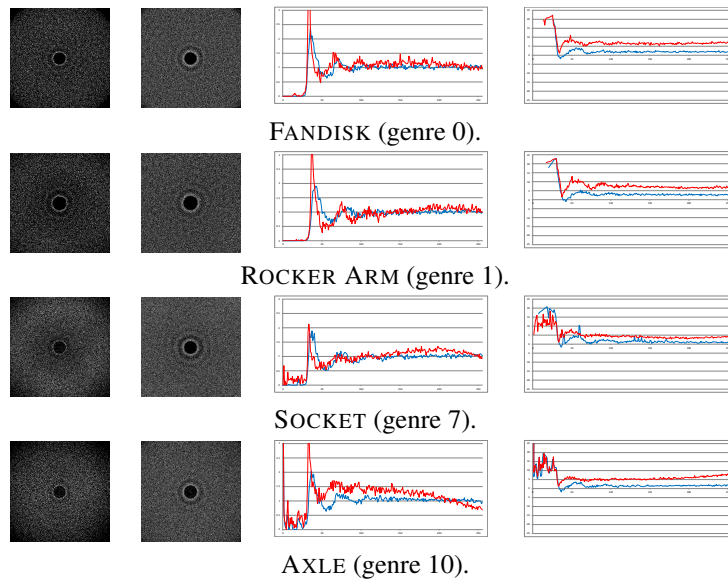


Tableau 4 – Comparaison des analyses obtenues avec l’outil original (courbes rouges) et notre amélioration (courbes bleues), sur des distributions obtenues avec la méthode d’échantillonnage [14]. De gauche à droite : la puissance spectrale moyenne obtenue avec l’outil original, la puissance spectrale moyenne obtenue avec notre amélioration, les courbes PSMR et les anisotropies correspondantes.

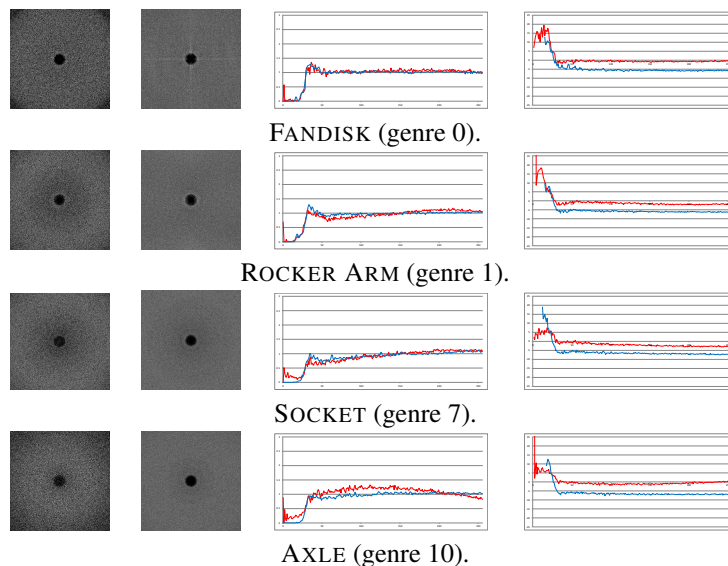


Tableau 5 – Comparaison des analyses obtenues avec l’outil original (courbes rouges) et notre amélioration (courbes bleues), sur des distributions obtenues avec la méthode d’échantillonnage [12]. De gauche à droite : la puissance spectrale moyenne obtenue avec l’outil original, la puissance spectrale moyenne obtenue avec notre amélioration, les courbes PSMR et les anisotropies correspondantes.

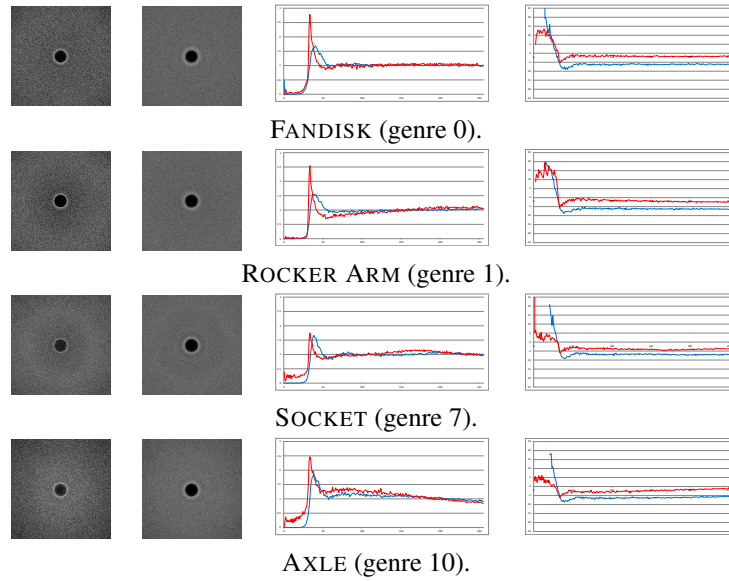


Tableau 6 – Comparaison des analyses obtenues avec l’outil original (courbes rouges) et notre amélioration (courbes bleues), sur des distributions obtenues avec la méthode d’échantillonnage [1]. De gauche à droite : la puissance spectrale moyenne obtenue avec l’outil original, la puissance spectrale moyenne obtenue avec notre amélioration, les courbes PSMR et les anisotropies correspondantes.

[7] A. Cengiz Öztireli, Marc Alexa, et Markus Gross. Spectral sampling of manifolds. Dans *ACM SIGGRAPH Asia 2010 Papers*, 2010.

[8] Matt Pharr et Greg Humphreys. *Physically Based Rendering : From Theory to Implementation*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 2004.

[9] Hongwei Li, Li-Yi Wei, Pedro V. Sander, et Chi-Wing Fu. Anisotropic blue noise sampling. Dans *ACM SIGGRAPH Asia 2010 Papers*, 2010.

[10] John Bowers, Rui Wang, Li-Yi Wei, et David Malletz. Parallel poisson disk sampling with spectrum analysis on surfaces. *ACM Transactions on Graphics*, 29 :166 :1–166 :10, 2010.

[11] Ryan Schmidt, Cindy Grimm, et Brian Wyvill. Interactive decal compositing with discrete exponential maps. Dans *ACM SIGGRAPH 2006 Papers*, 2006.

[12] Jean-Luc Peyrot, Frédéric Payan, et Marc Antonini. Feature-preserving direct blue noise sampling for surface meshes. Dans *Eurographics (Short Papers)*, pages 9–12, may 2012.

[13] Xin Xu, Ruizhen Hu, Craig Gotsman, et Ligang Liu. Blue noise sampling of surfaces. *Computer and Graphics*, 2012.

[14] Massimiliano Corsini, Paolo Cignoni, et Roberto Scopigno. Efficient and flexible sampling with blue noise properties of triangular meshes. *IEEE Transaction on Visualization and Computer Graphics*, 18 :914–924, 2012.