

Estimation de surfaces de Bézier à partir d'images de lumière structurée dans une optique de compression

V. Daval¹, A. Bajard², F. Truchetet¹ et O. Aubreton¹

¹ Laboratoire Électronique Informatique et Image,
université de Bourgogne - CNRS UMR 6306
12 rue de la Fonderie, 71200 Le Creusot
vincent.daval@u-bourgogne.fr

² Noomeo, 425 rue Jean Rostand, 31670 Labège
alban.bajard@noomeo.eu

Résumé

La compression des données 3D est devenue une thématique de plus en plus importante au fil de l'évolution des scanners. Avec l'évolution des technologies les scanners commerciaux fournissent, aujourd'hui, de plus en plus de points et donc des données de plus en plus conséquentes, ce qui peut conduire à des difficultés de transmission ou de stockage. Dans la plupart des cas, l'acquisition ne tient pas compte de l'utilisation finale des données alors que dans de nombreux cas, ceci permettrait de limiter le nombre de points. Dans cet article, nous proposons une approche qui permet de simplifier le nuage de points à des fins industrielles en utilisant des surfaces de Bézier.

Mots clefs

Acquisition, Lumière structurée, Surface de Bézier, Primitives, Compression.

1 Introduction

Actuellement la chaîne d'acquisition 3D classique (Fig. 1) est séquentielle car chaque étape fait appel à des compétences particulières bien distinctes et sont donc traitées par différents opérateurs. Il y a donc très peu d'interactions entre les différentes étapes de la chaîne et chaque partie va être analysée séparément, indépendamment de son utilisation future. De ce fait, aujourd'hui, les scanners commerciaux fournissent des nuages très denses composés de plusieurs millions de points afin d'obtenir la meilleure précision possible quelque soit l'utilisation finale.

Si dans certains cas industriels comme le « reverse-

engineering » cette quantité d'information semble justifiée, dans bien des cas industriels (contrôle des défauts, mesure de distance, ...) ce n'est pas forcément nécessaire. En effet, le fichier obtenu est très volumineux et pose des problèmes tant pour le stockage/transfert des données que pour le temps de calcul nécessaire pour analyser celles-ci. C'est pourquoi, dans la plupart des cas, on va chercher à réduire le nombre de points par des étapes de compression/simplification tout en préservant le maximum d'informations avant de faire une reconstruction de surface de l'objet. Cette problématique nous amène à nous poser une question : pourquoi calculer autant de points durant l'acquisition si, lors de l'étape suivante, on cherche à en réduire le nombre ?

Avant de décrire notre travail, il convient d'en situer correctement son contexte. Cette recherche s'inscrit dans le projet CreActive 3D regroupant trois partenaires différents qui sont la société Noomeo [1] spécialisée dans le développement de scanner 3D, le laboratoire I3S [2] spécialisé dans la compression de maillage et le laboratoire LE2I [3] qui travaille au niveau de l'acquisition. L'objectif du projet est de revoir la chaîne 3D classique (Fig. 1) dans son ensemble et d'appliquer ce concept au scanner de la société Noomeo (ce scanner est un système stéréoscopique à projection de lumière structurée).

Pour répondre à la question posée précédemment, nous proposons une approche permettant de réduire le nombre de points du nuage directement dès l'acquisition tout en préservant les informations importantes. Pour ce faire, nous proposons une méthode permettant de reconstruire une surface de Bézier approximative obtenue à partir des images de lumière structurée en utilisant peu de points, dans une optique de compression.

Aujourd'hui, il existe de nombreuses méthodes pour reconstruire une surface. Parmi celles-ci citons : une approche basée sur une surface Poisson [4], une basée sur un algorithme de Voronoi [5], sur un algorithme de Ball-



FIGURE 1 – La chaîne 3D classique : de l'acquisition à la compression.



FIGURE 2 – *Objet utilisé pour tester notre approche. L'objet est composé de formes géométriques simples (plans, sphère et cylindre) ainsi que de plusieurs zones saillantes (discontinuités).*

pivoting [6] ou encore les surfaces de Bézier [7]. Les surfaces de Bézier sont une adaptation des B-Splines adaptées à la CAO. L'intérêt des ces surfaces par rapport à d'autres méthodes réside dans l'utilisation de points de contrôle pour générer la surface, qui apparaît plus lisse et moins affectée par le bruit et les points aberrants. C'est d'ailleurs pour ces raisons qu'on les retrouve fréquemment dans les applications industrielles ayant pour but d'obtenir une CAO, notamment dans l'industrie automobile. C'est également pour ces mêmes raisons que nous avons choisi d'utiliser ces surfaces.

Dans la partie suivante, nous aborderons une approche pour segmenter et identifier les différents objets par des primitives simples. Dans les parties 3 et 4, nous proposons une méthode permettant de reconstruire une surface de Bézier plus ou moins dense pour chaque objet en fonction du type de primitives identifiées. Les résultats obtenus seront discutés en partie 5 et les perspectives et applications seront abordées dans une sixième partie.

2 Extraction d'informations

Comme mentionné précédemment, notre approche consiste à adapter une surface de Bézier en fonction de la complexité de l'objet. Pour cela, il faut avant tout segmenter les différents objets présents dans la scène.

Actuellement, il est possible d'extraire certains attributs complémentaires aux points 3D à partir des images de lumière structurée. Nous avons présenté une méthode [8] permettant d'extraire certaines informations, notamment les normales 3D (inspiré de la méthode [9]), une information de courbure directionnelle et une information de discontinuité à partir d'un système projecteur-caméra. En adaptant cette méthode au scanner de la société Noomeo, l'Opti-

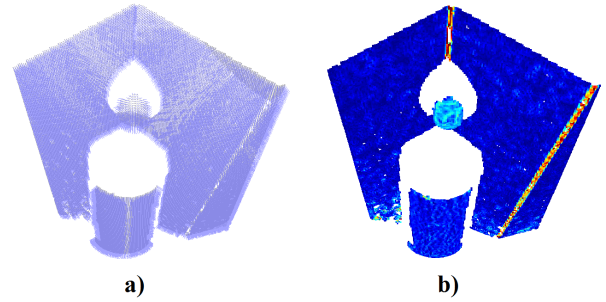


FIGURE 3 – *Résultats obtenus en utilisant notre méthode [8] sur l'objet présenté en Fig. 2. Les résultats ont été plaqués sur les points 3D pour un meilleur rendu mais ils ont été calculés à partir des images. a) Normales 3D. b) Discontinuités.*

Num [1], nous avons la possibilité de récupérer à la sortie de l'acquisition, les images des caméras, un nuage de points dont la densité peut être déterminé au préalable, les normales 3D ainsi qu'une information de discontinuité associée à chaque point 3D (Fig. 3).

2.1 Segmentation des objets

En utilisant ces attributs, notamment l'information de discontinuité (Fig. 3-b), il est possible de segmenter la scène en différents objets ai s'aidant des images fournies par le scanner. En supprimant les zones saillantes (Fig. 4-a) et en effectuant une dilatation morphologique sur chaque pixel, on a la possibilité de segmenter les différents objets (Fig. 4-b). Afin d'obtenir un meilleur rendu visuel, les résultats ont été plaqués sur les points 3D (Fig. 4) mais la segmentation est bel et bien effectuée à partir des images 2D, durant l'étape d'acquisition.

2.2 Identification des primitives

L'objectif final de notre approche consiste à compresser le nuage de points tout en conservant un maximum d'informations. Pour cela, il convient d'ajuster la densité de la sur-

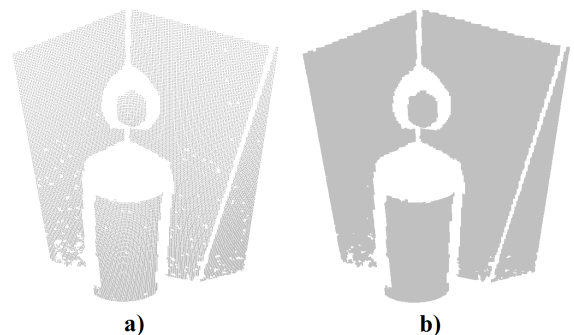


FIGURE 4 – *Segmentation des différents objets présents dans la scène à partir de l'information de discontinuité (Fig. 3-b). a) Nuage de points sans les zones saillantes. b) Résultat obtenu après dilatation morphologiques de chaque pixel.*

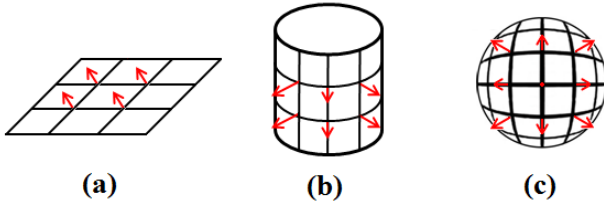


FIGURE 5 – Normales à la surfaces pour différents types de primitives. a) Plan. b) Cylindre. c) Sphère.

face de Bézier à la complexité de l'objet. Dans notre cas, l'objet test (Fig. 2) est composé de différentes primitives géométriques simples ; cylindre, plans et sphère. Intuitivement, on se doute que la densité de points nécessaire sur un plan sera plus faible que sur une sphère ou un cylindre. Pour chaque objet, nous avons une informations sur les normales 3D [8]. La figure 5 représente les normales à la surface sur différents types de primitives. Par définition, l'écart-type des normales pour chaque primitive donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} \text{Plan :} & \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0. \\ \text{Sphere :} & \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \neq 0. \\ \text{Cylindre :} & \sigma_x = \sigma_z \neq 0 \text{ et } \sigma_y = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Avec σ_x , σ_y et σ_z respectivement l'écart-type des normales selon x , y et z . Notons également, dans le cas du cylindre, que ces relations sont vérifiées uniquement si l'axe du cylindre est orienté dans la direction de l'axe y , ce qui ne sera jamais le cas en pratique. Cependant, ce problème peut être corrigé en effectuant un changement de repère. Par définition toutes les normales à la surface d'un cylindre vont passer par l'axe de celui-ci. On peut donc écrire,

$$\vec{n} \cdot \vec{V} = 0, \quad (2)$$

qui peut aussi se mettre sous la forme suivante :

$$n_x \cdot V_x + n_y \cdot V_y + n_z \cdot V_z = 0, \quad (3)$$

avec $\vec{n}$ le champ de normales 3D et $\vec{V}$ l'axe du cylindre. Connaissant les normales 3D on peut alors estimer l'axe du cylindre, en résolvant l'équation (3) par la méthode des moindres carrés. On obtient ainsi l'axe du cylindre exprimé dans le repère monde. Notons $\vec{U}$ et $\vec{W}$ deux vecteurs formant, avec $\vec{V}$, une base orthogonale R_c . On peut alors écrire la matrice de rotation R entre le repère du cylindre R_c et le repère monde R_m de la façon suivante :

$$R = \begin{bmatrix} U_x & V_x & W_x \\ U_y & V_y & W_y \\ U_z & V_z & W_z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

À partir de cette matrice, on a alors la possibilité de changer de repère et il devient ainsi possible de calculer l'écart-type des normales afin de déterminer le type de primitives. En effet, on peut appliquer cette méthode pour une sphère ou

un plan, ceci n'affectera en rien le calcul de l'écart-type, les relations (1) resteront vérifiées quel que soit le type de primitives (cylindre, sphère ou plan).

3 Surface de Bézier

Connaissant le type de primitives des différents objets présents dans la scène, on a alors la possibilité d'adapter la densité de points de chacun. Pour cela, on peut utiliser une simple décimation (par exemple, un sous-échantillonnage qui ne conserverait qu'un point sur deux). Cependant, une telle technique ne tient pas compte de la forme de l'objet et on risque de dégrader la localisation de points caractéristiques comme les arêtes. C'est l'une des raisons qui fait que nous avons choisi de nous orienter vers une décimation à partir des surfaces de Bézier, avec lesquelles il est possible de gérer l'échantillonnage sans affecter la localisation des points importants.

En général, avec des méthodes d'interpolation classiques, la courbe passe par tous les points, ce qui n'est pas le cas de Bézier, où la courbe passe par certains points et tend vers d'autres points (appelés points de contrôle). L'avantage des points de contrôle réside dans le fait que si un point est bruité ou aberrant l'allure de la courbe sera nettement moins affectée que dans le cas d'une interpolation classique.

3.1 Courbes de Bézier

Les courbes de Bézier (Fig. 6-a) sont des courbes polynomiales paramétriques permettant de faire une interpolation entre n points. Les courbes de Bézier d'ordre n sont définies par $n + 1$ points de contrôle de la façon suivante :

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \cdot P_i, \quad (5)$$

avec $t \in [0, 1]$ et où les B_i^n sont les polynômes de Bernstein. Dans la plupart des cas industriels, les courbes de Bézier sont d'ordre 3, cubique ($n = 3$). Dans ce cas, on peut écrire la courbe sous la forme paramétrique suivante :

$$P(t) = P_0(1-t)^3 + 3P_1t(1-t)^2 + 3P_2t^2(1-t) + P_3t^3 \quad (6)$$

pour $t \in [0, 1]$.

3.2 Surfaces de Bézier cubique

Une surface de Bézier cubique est composée d'un ou plusieurs carreaux de Bézier, qui sont eux mêmes obtenus à l'aide des courbes de Bézier. Un carreau de Bézier cubique (Fig. 6-b) est composé de 4×4 points de contrôle $P_{i,j}$, avec $0 \leq i \leq 3$ et $0 \leq j \leq 3$. Il est défini par l'équation suivante :

$$Q(u, v) = \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 P_{i,j}(u) \cdot B_{i,3}(u) \cdot B_{j,3}(v), \quad (7)$$

avec u et $v \in [0, 1]$, $B_{i,3}$ et $B_{j,3}$ les polynômes de Bernstein d'ordre 3 et $P_{i,j}$ les points de contrôle. On peut éga-

lement écrire l'équation (7) sous la forme matricielle suivante :

$$Q(u, v) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \cdot B_1 \cdot P \cdot B_2 \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} \quad (8)$$

avec

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et} \quad (10)$$

$$P = \begin{bmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3} \\ P_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

On constate que si l'on connaît les points de contrôles, on est alors capable de résoudre l'équation (8) et ainsi déterminer un carreau de Bézier entre ces différents points. La nouveauté de notre approche consiste à adapter la densité de points permettant de définir un carreau (paramètres u et v), ainsi que d'adapter le nombre de carreaux nécessaire en fonction du type d'objet et de sa complexité.

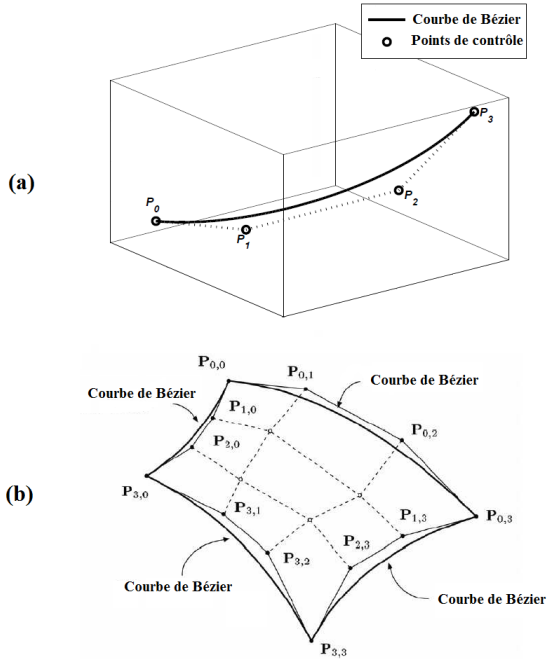


FIGURE 6 – Représentation tridimensionnelle des courbes et carreaux de Bézier (extrait de [10]). a) Courbe de Bézier. b) Carreau de Bézier cubique.

3.3 Estimation des points de contrôle

En général les points de contrôle utilisés pour créer un carreau de Bézier sont des points réels. Cette approche pose un problème, les courbes de Bézier ne passent pas par tous les points (Fig. 6-a), ce qui signifie que l'on privilégie des points par rapport à d'autres. De plus, on cherche à minimiser le nombre de points nécessaires pour reconstruire la surface. La question est donc : comment générer des points de contrôle à partir de seulement 4 points ?

En 2D, on retrouve parfois une méthode dérivée de l'algorithme de De Casteljau [11] permettant d'estimer des points de contrôle à partir de seulement deux points et leur normale. La figure 7 schématise la méthode permettant d'obtenir les points de contrôle P_1 et P_2 à partir des points P_0 et P_3 ainsi que des normales n_0 et n_3 pour une courbe quelconque $\mathcal{C}$.

Connaissant les couples $\{P_0, n_0\}$ et $\{P_3, n_3\}$ on peut calculer les tangentes t_1 et t_2 (en vert sur la Fig. 7) aux points P_0 et P_3 . De même, on peut calculer le segment $[P_0, P_3]$ et déterminer les points A et B espacés régulièrement sur le segment $[P_0, P_3]$ de la façon suivante :

$$A(x, y) = P_0(x, y) + \frac{|P_0(x, y) + P_3(x, y)|}{3}, \quad (12)$$

$$B(x, y) = P_0(x, y) + \frac{2 \times |P_0(x, y) + P_3(x, y)|}{3}. \quad (13)$$

Il est alors possible d'estimer le point de contrôle P_1 comme l'intersection de la tangente t_1 et de la droite perpendiculaire à $[P_0, P_3]$ au point A (en cyan sur la Fig. 7). La même méthode est applicable pour le point P_2 à partir de la tangente t_2 et de la perpendiculaire à $[P_0, P_3]$ au point B .

Par analogie, nous avons implémenté cette méthode en l'adaptant à la 3D. À partir des normales n_0 et n_3 , on peut déterminer les deux tangentes 3D T_1 et T_2 (l'équivalent de t_1 et t_2 en 2D) ainsi que les points A et B . On obtient alors les points P_1 et P_2 en calculant l'intersection des deux tangentes 3D et des deux plans Π_1 et Π_2 perpendiculaires aux points A et B (en cyan sur la Fig. 7 en 2D).

L'avantage de cette méthode est double, il permet de ne pas privilégier de points par rapport à d'autres et il permet également de réduire les probables discontinuités entre les

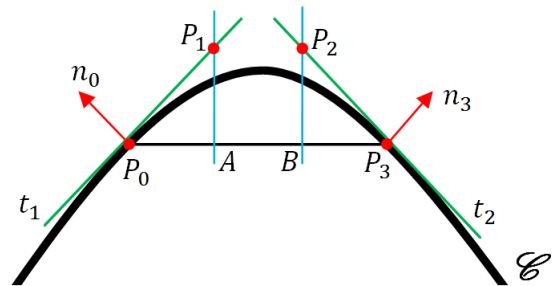


FIGURE 7 – Schéma explicatif pour obtenir les points de contrôle en 2D.

différents carreaux, rendant ainsi la surface plus continue que si nous avions choisi des points réels comme points de contrôle. Connaissant désormais la totalité des données de l'équation (8), il est possible d'obtenir une surface de Bézier.

4 Adaptation de la surface à l'objet

Maintenant qu'il est possible d'obtenir une surface de Bézier en tenant compte de la normale, il ne reste plus qu'à déterminer la densité de l'échantillonnage de la surface ainsi que le nombre de carreaux nécessaire en fonction du type d'objet identifié au préalable. L'objectif est de compresser au maximum le nuage de points et de préserver les informations importantes tout en essayant de conserver la meilleure qualité possible par rapport aux données initiales. Pour cela nous avons étudié, dans un premier temps, l'influence du nombre de points interpolés par carreau pour chaque primitive, puis dans un second temps, l'influence du nombre de carreaux pour chaque objet.

4.1 Influence de la densité des carreaux

Chaque carreau de Bézier est défini par l'équation (8). On constate, avec cette équation, que la densité de points dépend de l'échantillonnage de u et v . Nous avons comparé l'erreur pour différentes densités sur différents objets (l'erreur présentée ici et dans la suite du document correspond au maximum de l'erreur quadratique entre les points de Bézier obtenus avec notre méthode et la surface réelle de l'objet obtenue à partir d'un scan dense). La figure 8 montre l'évolution de l'erreur en fonction de la densité de points du vecteur u (avec $v = u$).

Pour chaque cas nous avons choisi arbitrairement de représenter la surface par neuf carreaux de Bézier. On constate que pour 5 points l'erreur est assez importante (erreur exprimée en μm) et qu'à partir de 10 points l'erreur n'évolue presque plus. Le but étant de compresser au maximum tout en minimisant l'erreur, le choix de 10 points interpolés pour le vecteur u (soit 100 points par carreau) semble être le meilleur compromis pour les trois types de primitives.

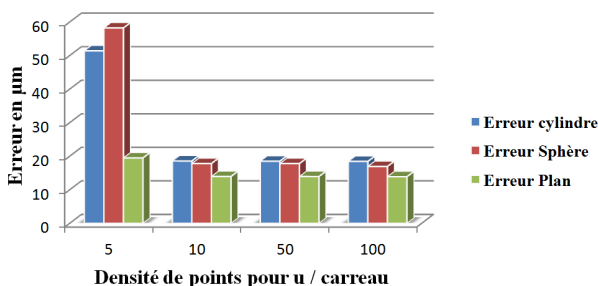


FIGURE 8 – Influence de l'échantillonnage de u et v . On compare l'erreur entre les points initiaux et les points de Bézier interpolés en fonction de la densité des vecteurs u et v .

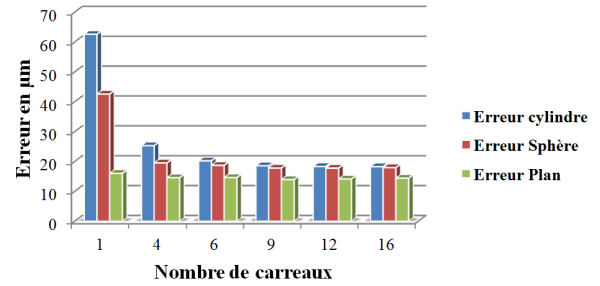


FIGURE 9 – Influence de l'erreur en fonction du nombre de carreaux pour chaque primitive.

4.2 Influence du nombre de carreaux

Le deuxième paramètre réglable est le nombre de carreaux que l'on peut utiliser pour représenter une surface correcte en fonction de la complexité de l'objet. De façon assez intuitive, on se doute que l'on aura besoin de moins de carreaux pour obtenir un résultat correct sur un plan que sur une sphère. La figure 9 montre effectivement que l'erreur évolue de façon assez significative en fonction du type de primitives.

Pour le plan l'erreur n'évoluant que très peu, prendre un seul carreau pour ce type de primitive semble correct. Dans le cas de la sphère et du cylindre le choix n'est pas aussi simple, il faut faire un compromis. Sur la figure 8 on remarque que les résultats se stabilisent vers les 20 μm . Afin de rester cohérent avec ces résultats, nous avons choisi de ne pas générer d'erreur de plus de 20 μm . Dans ces conditions, il nous faudrait un carreau (100 points) pour un plan, quatre carreaux (400 points) pour une sphère et 6 carreaux (600 points) pour un cylindre.

5 Résultats

Afin de tester notre méthode, nous avons appliqué toutes les étapes présentées dans cet article sur notre objet de référence (Fig. 2) : extraction d'informations, segmentation, identification de primitives, surfaces de Bézier. Les figures 3 et 4 présentent les deux premières étapes et la figure 10

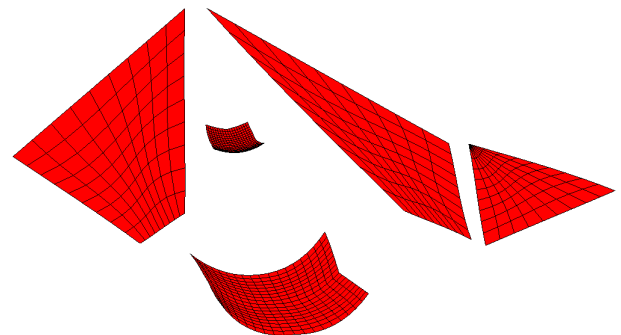


FIGURE 10 – Surface de Bézier obtenue pour l'objet présenté en figure 2 en tenant compte du type de primitive de chaque objet.

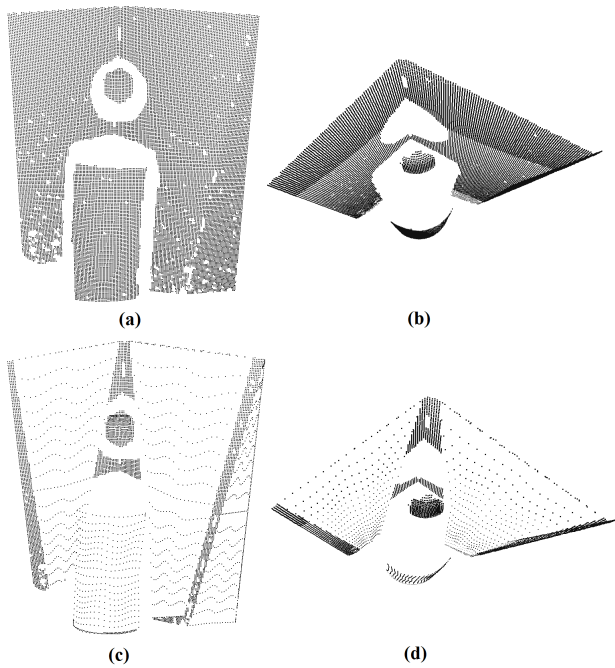


FIGURE 11 – *Simplification du nuage de points à partir des carreaux de Bézier. a) et b) Nuage de points d'origine vue sous deux angles différents. c) et d) Nuage de points simplifié obtenu avec notre méthode. Le nombre de points a été diminué de 82%.*

illustre le résultat obtenu en adaptant la surface de Bézier à chaque objet.

En utilisant ce résultat il est possible de simplifier notre nuage de points d'origine. En effet, en ne conservant que les points interpolés avec Bézier sur les objets identifiés par des primitives, il est possible de réduire le nombre de points de manière drastique, tout en conservant la totalité des points sur les zones discontinues (Fig. 11). Sur notre objet test, la diminution du nombre de points est de 82,03%.

Assez fréquemment avec les scanners à lumière structurée, il est possible de voir apparaître des trous dans le nuage de points, liés à des zones saturées par l'éclairage ou à des réflexions. Ces trous peuvent parfois être gênants lors de l'étape du maillage.

Un autre avantage à l'utilisation de Bézier réside dans la possibilité de pouvoir boucher ces trous étant donné que nous interpolons la surface à partir de peu de points. Afin de vérifier le bon fonctionnement de notre approche sur ce type de surface, nous avons ajouté une réflexion spéculaire sur la sphère (Fig. 12) et supprimé une zone sur l'un des plans. La figure 13 montre le résultat obtenu en bouchant les trous et en réalisant une diminution de 80,7% de points. L'erreur maximale commise sur la sphère par rapport au nuage complet (sans le trou) est de $38,7\mu m$.



FIGURE 12 – *Objet test avec réflexion spéculaire sur la sphère pour tester notre approche.*

6 Conclusion et perspectives

Dans ce document, nous avons présenté une méthode en plusieurs étapes permettant de simplifier un nuage de points à partir d'une surface de Bézier tout en conservant les informations les plus pertinentes comme les arêtes. Cette approche est réalisée en partie à partir des images (comme la segmentation et l'identification des primitives) et n'utilise que très peu de données 3D ce qui permet d'obtenir des résultats très rapidement. L'objectif étant de réa-

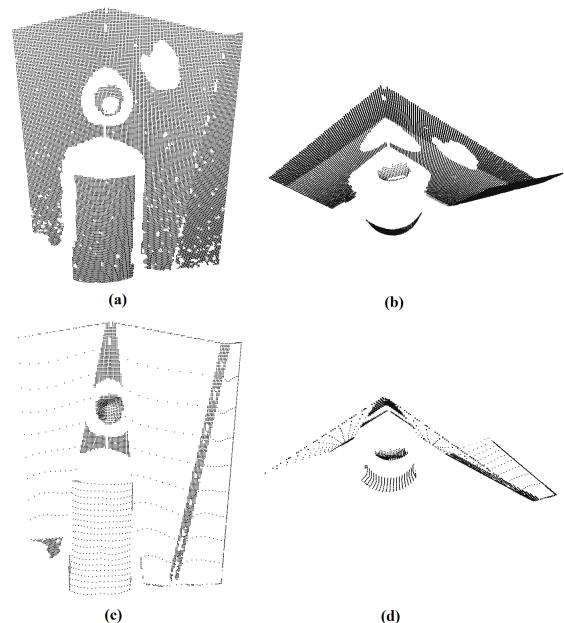


FIGURE 13 – *Simplification du nuage de points à partir de l'objet présenté en figure 12. On remarque que notre approche permet de boucher les deux trous présents dans la scène (sur la sphère et sur le plan).*

liser toute la méthode pendant la phase d'acquisition. Notre méthode a également ses limites. Sur des formes moins géométriques comme un visage la compression serait très faible, voir nulle étant donné qu'il y a très peu de primitives. Cependant dans notre cas, nous travaillons sur des pièces industrielles qui sont composées de nombreuses primitives.

Les résultats offrent des perspectives intéressantes. Il serait judicieux de définir d'autres primitives comme des cônes ou des tores ainsi que de tester cette approche sur des formes plus complexe. Une autre possibilité, non plus dans un but de compression mais plutôt de « coarse to fine », consisterait à calculer de nouveaux points dans les zones discontinues ou porteuses d'informations afin d'apporter plus d'informations significatives au nuage de points.

Références

- [1] Société Noomeo. <http://www.noomeo.eu/>.
- [2] Laboratoire I3S. <http://www.i3s.unice.fr/>.
- [3] Laboratoire LE2I. <http://le2i.cnrs.fr/>.
- [4] M. Kazhdan, M. Bolitho, et H. Hoppe. Poisson surface reconstruction. *Proceedings of the fourth Eurographics symposium on Geometry processing*, pages 61–70, 2006.
- [5] N. Amenta, M. Bern, et M. Kamvysselis. A new voronoi-based surface reconstruction algorithm. *SIGGRAPH '98*, pages 415–421, 1998.
- [6] F. Bernardin, J. Mittleman, H. Rushmeier, C. Silva, et G. Taubin. The ball-pivoting algorithm for surface reconstruction. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 5(4) :349–359, 1999.
- [7] Jiwen Zhang. C-bézier curves and surfaces. *Graphical Models and Image Processing*, 61 :2 – 15, 1999.
- [8] V. Daval, F. Truchetet, et O. Aubreton. Extraction de primitives à partir d'images de lumière structurée. *Orasis, Congrès des jeunes chercheurs en vision par ordinateur*, 2013.
- [9] Zhan Song et C.R. Chung. Determining both surface position and orientation in structured-light-based sensing. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 32(10) :1770–1780, 2010.
- [10] K. Joy. Bezier curves and patches. *Course, On-Line Geometric Modeling Notes*, 1996.
- [11] T. Guillod. Bezier subdivision and de casteljau's algorithm. *Bulletin de la Société des Enseignants Neuchâtelois de Sciences*, pages 12–31, 2008.