

# Correction de pertes par expansion de signal sur base de fonctions redondantes

Xavier Hénocq, Gagan Rath and Christine Guillemot

IRISA/INRIA Rennes  
Campus universitaires de Beaulieu  
35042 Rennes Cedex  
prénom.nom@irisa.fr

## Résumé

*Cet article s'insère dans le cadre général de la transmission d'applications vidéos temps réel sur internet. La méthode de robustification de flux proposée abandonne le schéma classique séparant le codage de source et le codage canal en insérant une transformation redondante entre la transformation décorrélante (DCT) et la quantification. Nous montrons que le décodage syndrome, méthode classique de décodage pour les codes correcteurs d'erreurs, peut aussi être appliquée dans le cadre de décompositions de signal sur des bases de fonction redondante appelées "frames" en présence d'effacements. Cette méthode permet de faciliter la mise en oeuvre de techniques de type projections sur ensembles convexes, améliorant ainsi la qualité de reconstruction.*

## Mots Clef

Frame expansion, POCS, Transmission de données, Réseau de paquets, Correction d'effacements.

## 1 Introduction

Cet article s'insère dans le cadre général de la transmission d'applications vidéos temps réel sur internet. Ce type de réseau souffrant notamment de pertes de paquets, notre objectif est d'augmenter la qualité apparente d'une transmission à la fois dans un environnement unicast et multicast. Les approches classiques basées retransmission des données perdues ou basées FEC (Forward Error Control) présentent chacune l'inconvénient d'engendrer des délais parfois importants. Pour palier cet inconvénient, nous proposons d'introduire une transformation redondante entre la transformation décorrélante (DCT) et la quantification. Nous nous appuyons pour cela sur la théorie des "frames" proposée par Daubechie [1]. Ce formalisme nous a permis de déterminer quelles sont les transformations redondantes les plus attrayantes en terme de réduction de bruit et de comportement dans un contexte d'effacements de données. Comme le montre Goyal [2], une telle approche permet non seulement

de récupérer des pertes mais aussi d'atténuer les effets du bruit de quantification. A la différence de l'approche classique, toute donnée reçue est utile puisqu'elle accroîtra la qualité. Dans la littérature anglo-saxonne, ces décompositions sur bases de fonctions redondantes sont appelées "frame expansion" (FE). Dans la suite de cet article, nous utiliserons les anglicismes FE pour dénoter ces transformations et frame pour dénoter les bases de fonctions redondantes correspondantes vérifiant les propriétés définies dans [1]. En étendant les travaux de Goyal nous montrons que les techniques de reconstruction naturelles des FE basées sur des projections s'apparentent à un décodage basé syndrome. L'intérêt du décodage basé syndrome est qu'il facilite la mise en oeuvre des techniques de type projections sur ensembles convexes (POCS). Un couplage du décodage basé syndrome et des POCS permet une amélioration de la qualité de reconstruction.

## 2 Frame expansion

Soit  $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N \subset \mathbb{R}^K$  un ensemble de vecteurs de dimension  $K$ .  $\Phi$  est une *frame* si il existe  $A > 0$  et  $B < \infty$  tels que pour tout  $f \in \mathbb{R}^K$ ,

$$A\|f\|^2 \leq \sum_{k=1}^N |\langle f, \varphi_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2 \quad (1)$$

$A$  et  $B$  sont les *bornes des frames*. Cette définition implique que tout ensemble fini de vecteurs qui parcourt  $\mathbb{R}^K$  forme une frame. Par définition  $K \leq N$ .

L'*opérateur de frame*  $F$  est l'opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^K$  dans  $\mathbb{R}^N$  défini par

$$(Ff)_k = \langle f, \varphi_k \rangle \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Une frame est dite *tight* si  $F^*F = AI_K$  ( $A = B$ ), où  $I_K$  est la matrice identité de taille  $K$  et  $*$  indique la transposée hermitienne. Pour toutes frames d'opérateur  $F$ , les valeurs propres de  $F^*F$  se situent dans l'intervalle  $[A, B]$ . Cette propriété permet d'assurer que  $F^*F$  est toujours inversible. La *frame duale* de  $\Phi$  est définie par  $\{\tilde{\varphi}_k\}_{k=1}^N$  où

$$\tilde{\varphi}_k = (F^*F)^{-1}\varphi_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

$\tilde{\Phi}$  est une frame ayant pour bornes  $B^{-1}$  et  $A^{-1}$ . Son opérateur est noté  $\tilde{F}^*$ .

$$\tilde{F}^* = (F^* F)^{-1} F^* \quad (4)$$

## 2.1 Méthode de décodage classique

La méthode de décodage naturelle des FE consiste à projeter les coefficients reçus dans l'espace de départ. Dans un contexte sans pertes ni quantification cette opération consiste à multiplier le vecteur reçu par le dual de l'opérateur  $F$ .

$$x = \tilde{F}^* F x = \sum_{k=1}^N \langle x, \varphi_k \rangle \tilde{\varphi}_k. \quad (5)$$

En présence d'effacements on constitue un nouvel opérateur de frame en utilisant les vecteurs de  $F$  correspondant aux échantillons reçus. L'opérateur de reconstruction est alors le dual de cet opérateur.

La section suivante présente une seconde méthode de décodage inspirée des méthodes employées pour les codes correcteurs définis dans le domaines des réels (CCR) et généralement appelées décodage syndrome.

## 2.2 Décodage syndrome

Prenons un opérateur de frame  $F$  de taille  $N * K$ . Cet opérateur étant de rang plein, nous pouvons lui appliquer une décomposition de Smith Mac-Millan [3].

$$F = U \Gamma W \quad (6)$$

Cette méthode de diagonalisation fait apparaître trois matrices.  $U$  et  $W$  sont respectivement une matrice  $N * N$  et une matrice  $K * K$ . La matrice  $\Gamma$  est une matrice  $N * K$  diagonale sur les  $K$  premières lignes et constituée de zéros sur les  $N - K$  lignes restantes.  $U$  étant par définition une matrice unimodulaire, il est possible de l'inverser. On multiplie (6) des deux côtés par l'inverse de  $U$ .

$$U^{-1} F = \Gamma W$$

$$\begin{bmatrix} U_{1,\dots,K}^{-1} \\ U_{(K+1),\dots,N}^{-1} \end{bmatrix} [ F ] = \begin{bmatrix} \Gamma_{1,\dots,K} \\ \Gamma_{(K+1),\dots,N} \end{bmatrix} [ W ]$$

où  $U_{1,\dots,K}^{-1}$  et  $U_{(K+1),\dots,N}^{-1}$  représentent respectivement les  $K$  premières et les  $N - K$  dernières lignes de  $U^{-1}$ .  $\Gamma_{1,\dots,K}$  et  $\Gamma_{(K+1),\dots,N}$  représentent respectivement les  $K$  premières et les  $N - K$  dernières lignes de  $\Gamma$ . La multiplication à gauche de  $F$  par les  $N - K$  dernières lignes de  $U^{-1}$  sera égale à une matrice  $(N - K) * K$  constituée uniquement de 0. Les dernières lignes de  $U^{-1}$  forment, en reprenant la terminologie utilisée pour les codes correcteurs d'erreurs, la matrice de contrôle de parité de l'opérateur de frame  $F$  notée  $H$ . Supposons maintenant qu'une FE a été réalisée sur un vecteur  $\mathbf{v}$  de dimension  $K$  avec l'opérateur  $F$ . Soit  $\mathbf{V}$  le vecteur de dimension  $N$  obtenu. On suppose que  $e \leq (N - K)$  composantes ont été perdues. La première étape du

décodage consiste à remplacer dans le vecteur reçu les composantes perdues par des inconnues. On multiplie ensuite le vecteur  $\hat{\mathbf{V}}$  ainsi formé par la matrice de contrôle de parité.

$$H \hat{\mathbf{V}} = \vec{0} \quad (7)$$

où  $\vec{0}$  est un vecteur nul. On développe ce système d'équations en laissant à droite toutes les inconnues:

$$H_i \mathbf{V}_i = -H_r \mathbf{V}_r \quad (8)$$

$\mathbf{V}_i$  et  $\mathbf{V}_r$  sont respectivement le vecteur de taille  $e$  des inconnues et le vecteur de taille  $(N - e)$  constitué des données reçues.  $H_i$  est la sous matrice  $(N - K) * e$  de  $H$  constituée des colonnes de  $H$  correspondant aux inconnues et  $H_r$  est la sous matrice  $(N - K) * (N - e)$  de  $H$  constituée des colonnes de  $H$  restantes.  $H_i$  étant en générale rectangulaire, on calculera sa pseudo-inverse (notée  $\tilde{H}_i^*$ ) pour résoudre ce système. On a donc

$$\tilde{H}_i^* = (H_i^* H_i)^{-1} H_i^* \quad (9)$$

De l'équation (8) on déduit

$$\mathbf{V}_i = -\tilde{H}_i^* H_r \mathbf{V}_r \quad (10)$$

On retrouve ainsi les composantes perdues. Il est nécessaire pour que cette opération soit valide que  $H_i$  soit inversible, ce qui dépendra de l'opérateur de frame utilisé. Cette inversion et donc la résolution du système (10) équivalent à un décodage par syndromes sera toujours possible pour les frames DFT [4] et les frames harmoniques définies dans [2]. On reforme le mot de code transmis  $y$  en utilisant  $\mathbf{V}_i$  et  $\mathbf{V}_r$ . Le mot codé est ensuite retrouvé en appliquant l'eq.(5) avec l'opérateur dual de la frame originale.

Nous avons donc montré que l'utilisation du décodage basé syndrome était possible dans le contexte des FE. Dans [4], nous montrons que cette méthode est équivalente à la méthode classique de décodage de FE basé sur des projections par l'opérateur de la frame duale.

## 2.3 Impact du bruit de quantification

L'intérêt des FE par rapport à d'autres transformations redondantes est d'assurer une reconstruction numériquement stable. Soient deux vecteurs  $y_1 = F x_1$  et  $y_2 = F x_2$  supposés très proches ( $\|y_1 - y_2\|^2$  est petit). Une reconstruction sera dite stable si les versions reconstruites des vecteurs  $x_1$  et  $x_2$  sont proches elles aussi ( $\|x_1 - x_2\|$  est petit). Dans ces conditions de petites erreurs de transmission (erreur d'arrondi ou erreur de quantification) auront un impact faible sur la qualité de reconstruction. Pour que cette propriété soit vérifiée il faut que la transformation redondante  $F$  soit bornée, donc qu'elle soit une frame. Plus ses bornes sont proches, moins l'impact d'un bruit sera fort. Pour des questions de qualité de reconstruction, on a donc

tout intérêt à choisir des opérateurs de frames dites “tight”, c’est à dire dont les bornes sont égales. Par la suite nous utiliserons des “tight frames”.

Dans notre approche, tous les vecteurs doivent être quantifiés avant d’être transmis. On suppose ici que tous les échantillons d’un vecteur sont quantifiés avec un quantificateur scalaire uniforme identique. Le bruit de quantification est supposé blanc, de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ . Soit  $q$  le vecteur d’erreur de quantification pour le mot de code  $y$ . On souhaite approximer  $x$  étant donné  $\hat{y} = y + q$ . Dans un cas sans pertes, nous reconstruisons le signal en utilisant l’opérateur dual.

$$\hat{x} = \tilde{F}^*(Fx + q) = \sum_{k=1}^N (\langle x, \varphi_k \rangle + q_k) \tilde{\varphi}_k \quad (11)$$

On peut calculer l’erreur de reconstruction:

$$\begin{aligned} x - \hat{x} &= \sum_{k=1}^N (\langle x, \varphi_k \rangle) \tilde{\varphi}_k - \sum_{k=1}^N (\langle x, \varphi_k \rangle + q_k) \tilde{\varphi}_k \\ &= - \sum_{k=1}^N q_k \tilde{\varphi}_k \end{aligned} \quad (12)$$

L’EQM par composantes est:

$$\begin{aligned} EQM &= \frac{1}{K} E \|x - \hat{x}\|^2 = \frac{1}{K} E \left\| \sum_{k=1}^N q_k \tilde{\varphi}_k \right\|^2 \\ &= \frac{1}{K} E \left[ \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^N q_i q_k \tilde{\varphi}_i^* \tilde{\varphi}_k \right] \\ &= \frac{1}{K} \sigma^2 \sum_{k=1}^N \|\tilde{\varphi}_k\|^2 \end{aligned} \quad (13)$$

Notons que dans le cas des “tight frames”,  $EQM = (K/N)\sigma^2$ . On constate donc dans le cas sans pertes une réduction de l’EQM.

Dans le cas avec pertes, la qualité de la reconstruction dépend de la position des éléments perdus dans les vecteurs transmis. Il est nécessaire que l’opérateur  $F_p$  formé en retirant de  $F$  les vecteurs correspondant aux pertes forme toujours une frame. Les opérateurs de frame choisis dans cet article vérifient toujours cette propriété tant que le nombre de pertes est inférieur ou égal à  $N - K$ . Cette propriété n’assure toutefois pas une bonne qualité de reconstruction. Il est aussi nécessaire que la frame représentée par l’opérateur  $F_p$ , offre une reconstruction stable. Aucune frame n’offre cette propriété pour toutes les configurations possibles de  $F_p$ . Dans certains cas les bornes de ces frames seront très éloignées ( $A$  tend vers 0 et  $B$  vers  $\infty$ ). Ceci signifie que la borne supérieure du dual de cette frame  $A^{-1}$  tend vers l’infini et que de ce fait la frame duale n’est plus bornée. La condition de stabilité n’étant plus vérifiée, le moindre bruit (par exemple le bruit de quantification) pourra avoir un très fort impact sur la reconstruction. Dans [4] on montre qu’il est possible de réduire l’occurrence de telles configurations de pertes en adaptant la méthode de paquets à la frame utilisée. Dans la section suivante nous montrons une approche complémentaire qui pourra permettre de réduire l’impact sur la qualité de reconstruction de ces configurations problématiques.

### 3 Schéma de codage basé “frame expansion” et POCS

Nous proposons un schéma de codage robuste d’images basé sur des FE. Un signal d’entrée  $x \in \mathbb{R}^K$  constitué de coefficients DCT est représenté par un vecteur  $y = Fx \in \mathbb{R}^N$ .  $F$  est un opérateur de Frames. Deux types de frames ont été testées: les frames harmoniques et les frames DFT. Ces deux frames étant telles qu’un sous-ensemble de  $L$  vecteurs pris dans ces deux bases  $K \leq L < N$  forme toujours une frame, la reconstruction du signal est toujours envisageable pour un nombre d’effacements  $e \leq (N - K)$ . Ces deux frames possèdent les mêmes configurations de pertes problématiques. L’étude que nous avons menée dans [4] nous a permis de les identifier comme étant les configurations où les pertes sont consécutives. Après la FE les coefficients de  $y$  subissent une quantification scalaire et un codage entropique.

La figure (1 (a) et (b)) compare notre approche basée sur des FE (frames harmoniques et frames DFT) à une approche classique où un code correcteur de Reed-solomon suit la DCT et la quantification. Ces approches ont été testées sur l’image fixe “léna”. Les paramètres de nos frames sont  $K = 8$  et  $N = 16$ . Le taux de protection assuré par le code correcteur est de  $K/N = 8/16$ . La méthode de paquets reprend la méthode de Goyal [2]. On forme des vecteurs de 8 coefficients DCT d’une même sous-bande provenant de blocs successifs de l’image. On obtient en sortie des FE et du code de RS des vecteurs de taille 16. Les 16 éléments de chaque vecteur sont insérés dans 16 paquets différents. On simule toutes les configurations possibles de  $e \in [0,8]$  pertes consécutives et non consécutives de ces paquets. On constate dans le cas des pertes non consécutives (a) que chaque paquet reçu permet d’accroître la qualité. La figure (b) montre à quel point les pertes consécutives sont préjudiciables à la méthode.

La méthode de paquets adaptée à la frame utilisée [4] ne garantissant pas qu’aucune configuration problématique ne se produira, nous proposons d’introduire après le décodage syndrome une méthode basée sur des projections sur ensemble convexe (POCS) et chargée de réduire l’impact négatif de ces configurations le cas échéant.

Les POCS sont souvent utilisées en reconstruction d’images. On suppose alors que chaque propriété d’une image peut être formulée sous la forme d’un sous-ensemble convexe de l’espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ .  $n$  propriétés généreront donc  $n$  ensembles convexe bien définis  $C_i$  et nécessairement l’image reconstruite  $f$  devra appartenir à chacun des ensembles ainsi qu’à l’intersection de tous les ensembles  $C^*$ . Si le projecteur  $P^*$  sur  $C^*$  est connu, le problème sera résolu aisément. Malheureusement,  $C^*$  peut être non linéaire et de structure complexe. Une réalisation directe de la projection

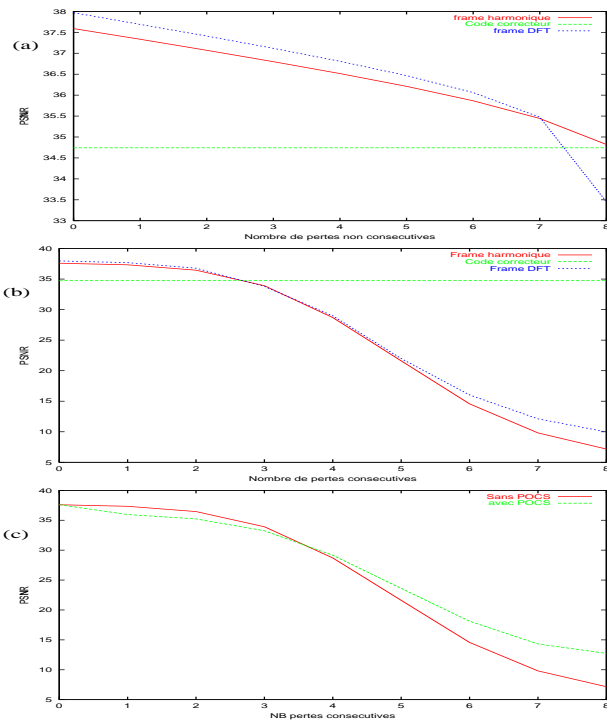


FIG. 1 – Impact des pertes non consécutives (a) et consécutives (b). Impact des POCS(c)

est donc souvent impossible. Toutefois, si chaque  $P_i$  projetant sur son ensemble  $C_i$  est faisable, le problème aura une solution récursive grâce à la théorie des POCS [5]. Les techniques basées POCS nécessitent donc la définition d'au minimum deux ensembles convexes auxquels devra appartenir l'image reconstruite, et les opérateurs de projection associés.

Dans notre cas, deux ensembles convexes ont été définis. Soient  $\Omega_D$  et  $\Omega_F$  respectivement les ensembles bornés des coefficients DCT et de FE admissibles. On suppose que les bornes supérieures  $\beta_{ij}^D$  et inférieures  $\alpha_{ij}^D$  ( $i$  et  $j = 1, \dots, 8$ ) des coefficients DCT dans chacune des 64 sous-bandes sont connues par le récepteur. Ceci définit  $\Omega_D$  et permet indirectement de définir  $\Omega_F$ . On peut en effet déduire les bornes supérieures  $\beta_{ij}^F$  et inférieures  $\alpha_{ij}^F$  de chaque sous-bande à partir des bornes dans le domaine DCT. On applique l'algorithme de décodage suivant: pour chaque vecteur reçu  $\mathbf{V}_r$  formé de coefficients de la sous-bande  $(i, j)$

1. Déterminer les composantes perdues de  $\mathbf{V}_r$  en résolvant le système d'équations (10). Former un vecteur  $\hat{\mathbf{V}} = (\hat{V}_1, \dots, \hat{V}_N)$  avec les composantes reçues et les composantes estimées.
2. Pour  $k = 1, \dots, N$ , si  $\hat{V}_k \in [\alpha_{ij}^F, \beta_{ij}^F]$ ,  $\hat{V}_k$  reste inchangée sinon
  - si  $\hat{V}_k < \alpha_{ij}^F$  alors  $\hat{V}_k = \alpha_{ij}^F$
  - si  $\hat{V}_k > \beta_{ij}^F$  alors  $\hat{V}_k = \beta_{ij}^F$
3. Projection de  $\hat{\mathbf{V}}$  dans l'espace DCT avec le dual de F. On obtient  $\hat{\mathbf{v}}_n = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_K)$  représentant le vecteur de coefficients DCT estimé à l'itération  $n$ .

4. Pour  $k = 1, \dots, K$ , si  $\hat{v}_k \in [\alpha_{ij}^D, \beta_{ij}^D]$ ,  $\hat{v}_k$  reste inchangée sinon
  - si  $\hat{v}_k < \alpha_{ij}^D$  alors  $\hat{v}_k = \alpha_{ij}^D$
  - si  $\hat{v}_k > \beta_{ij}^D$  alors  $\hat{v}_k = \beta_{ij}^D$
5. si  $\|\hat{\mathbf{v}}_n - \hat{\mathbf{v}}_{n-1}\| > \epsilon$  alors passer à l'étape de quantification inverse et reconstruire le signal. Sinon projeter  $\hat{\mathbf{v}}_n$  dans l'espace des coefficients de frames avec F. Retour à l'étape 2.

L'intérêt du décodage syndrome est que l'estimation des coefficients perdus permet d'initialiser directement le processus de POCS. La méthode classique nécessitera une première reconstruction par l'opérateur dual de la frame définie à partir des vecteurs correspondant aux données reçues. Ce n'est qu'ensuite que la phase itérative pourra débuter. L'utilisation du décodage syndrome permet donc de supprimer une itération. Il est clair que le coût calculatoire lié aux itérations n'est pas négligeable. Dans un contexte temps réel, toute solution permettant de limiter leur nombre est toujours appréciable.

La figure (1.c) compare les résultats obtenus avec et sans POCS en utilisant la même procédure de test que précédemment pour des frames harmoniques. On note qu'au delà de 3 pertes consécutives la méthode basée POCS permet d'accroître la qualité de reconstruction.

## 4 Conclusion

Nous avons montré dans cet article que le décodage syndrome pouvait être appliqué aux FE. Le couplage de cette méthode avec des techniques de POCS permet ici de s'assurer que les données reconstruites appartiennent bien à l'intersection d'ensembles définis en tenant compte des propriétés de l'image originale. Les résultats montrent que les POCS permettent d'accroître la qualité de la reconstruction. Cette méthode est en cours d'insertion dans un codeur H263+ et devrait permettre d'aboutir à une méthode de codage vidéo par descriptions multiples.

## Références

- [1] I. Daubechies. *Ten Lectures On Wavelets*, chapter 3, page 56. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.
- [2] V. K. Goyal, J. Kovacevic, and J. A. Kelner. Quantized frame expansions with erasures. *Journal of Appl. and Comput. Harmonic Analysis*, 2001.
- [3] P. P. Vaidyanathan. *Multirate Systems and Filter Banks*. Prentice Hall Signal Processing Series, 1993.
- [4] G. Rath, X. Hénoq, and C. Guillemot. Application of dft codes for robustness to erasures. *À paraître dans les proc. de Globecom 2001*, 2001.
- [5] R. J. Marks II. *Deconvolution of Images and Spectra*, chapter 14. Alternating Projections Onto Convex Sets, pages 476–501. Academic press, San Diego, 1997.