

Approximation de courbes et surfaces par un modèle fractal

E. Guérin¹

E. Tosan¹

A. Baskurt¹

¹ LIGIM (Laboratoire d'Informatique Graphique, Image et Modélisation)

EA 1899, Université Claude Bernard, Lyon 1

Bât. 710, 43 bd du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex FRANCE

eguerin@ligim.univ-lyon1.fr

Résumé

Nous proposons ici une méthode générale d'approximation de courbes et de surfaces. Le modèle fractal utilisé est unifié, il s'agit des formes fractales à pôles. Grâce à une paramétrisation de ce modèle, une famille de courbes et de surfaces est construite. Le problème d'approximation se ramène alors à un problème de régression non-linéaire. L'algorithme de LEVENBERG-MARQUARDT permet de trouver une solution à celui-ci.

Mots Clef

Approximation, fractal, courbe, surface, compression d'images.

1 Introduction

L'approximation des objets naturels (courbes 2D, surfaces 3D, images) par des formes fractales constitue aujourd'hui un important centre d'intérêt pour la recherche. Sous le nom générique de "problème inverse", cette problématique intéresse en effet des domaines d'application aussi divers que la représentation synthétique de l'information pour la transmission et la compression d'images, la reconstruction 3D pour la visualisation ou la CAO.

Diverses études ont été menées pour tenter de résoudre le problème inverse dans le cas fractal en se situant dans une optique de résolution approchée, comme le premier algorithme de compression fractale proposé par JACQUIN en 1992. D'une manière générale, il s'agit d'associer, par exemple à une image naturelle, un modèle qui décrit (ou code) le mieux possible cette image en termes de complexité du modèle et d'erreur d'approximation. Les techniques existantes d'approximation fractale souffrent aujourd'hui d'un manque de souplesse en terme de contrôle sur la forme utilisée pour l'approximation. Ceci est dû essentiellement à l'utilisation du modèle IFS [1] composé de transformations contractantes simples, car définies dans un espace réduit, par exemple $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ pour les images. Le modèle fractal proposé [2][3] généralise le modèle IFS

en le couplant à un ensemble de points de contrôle. Ainsi, les transformations contractantes de ce nouveau modèle (modèle IFS projeté) sont définies et recherchées dans un espace élargi, $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$. L'approximation de la forme originale est effectuée en appliquant une projection en utilisant les points de contrôle.

2 Modèle d'approximation

Introduits par BARNESLEY[1] en 1988, les IFS permettent de générer des formes géométriques ou des images [4] grâce à un procédé itératif. La modélisation basée sur les IFS est définie par un triplet $(\mathcal{X}, d, \mathcal{S})$ où :

- (\mathcal{X}, d) est un espace métrique complet, \mathcal{X} est appelé *espace d'itération*;
- \mathcal{S} est un semi-groupe qui agit sur les points de \mathcal{X} tel que : $p \mapsto Tp$ où T est un opérateur contractant, \mathcal{S} est appelé *semi-groupe d'itération*.

Un IFS \mathcal{I} (*Iterative Function System*) est un sous-ensemble fini de \mathcal{S} : $\mathcal{I} = \{T_0, \dots, T_{N-1}\}$ avec $T_i \in \mathcal{S}$. On note $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ l'ensemble de compacts non vides de \mathcal{X} . L'opérateur de HUTCHINSON associé est :

$$K \in \mathcal{H}(\mathcal{X}) \mapsto \mathcal{I}K = T_0K \cup \dots \cup T_{N-1}K$$

Cet opérateur est contractant dans le nouvel espace métrique complet $\mathcal{H}(\mathcal{X})$ et admet un point fixe appelé *attracteur* [1] :

$$\mathcal{A}(\mathcal{I}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}^n K \text{ avec } K \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$$

Lorsque les opérateurs satisfont certaines conditions de raccord, cet attracteur est une courbe ou une surface [6] :

$$\mathcal{A}(\mathcal{I}) = \{\phi(s, t) \mid (s, t) \in [0, 1]^2\}$$

où ϕ est une fonction $\phi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathcal{X}$.

Classiquement, en interpolation fractale [1] ou en compression fractale [4], l'espace métrique complet \mathcal{X} utilisé est \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 , et le semi-groupe d'itération est constitué d'opérateurs affines contractants. Notre travail con-

siste à élargir l'espace d'itération. Pour cela, nous utilisons un espace à coordonnées barycentriques $\mathcal{X} = \mathcal{B}^J$:

$$\mathcal{B}^J = \{(\lambda_j)_{j \in J} \mid \sum_{j \in J} \lambda_j = 1\}$$

Dans le cas des courbes, nous avons $J = \{0, \dots, m\}$ [2] [3], dans le cas des surfaces ou des images nous avons $J = \{0, \dots, m\} \times \{0, \dots, m\}$. Ainsi, le semi-groupe d'itération est constitué de matrices dont les colonnes sont barycentriques :

$$S_J = \{T \mid \sum_{j \in J} T_{ij} = 1, \forall i \in J\}$$

Ce choix mène à la généralisation des attracteurs IFS appelé *attracteurs IFS projetés* :

$$P\mathcal{A}(\mathcal{I}) = \{P\lambda \mid \lambda \in \mathcal{A}(\mathcal{I})\}$$

où P est un polygone de contrôle (dans le cas des courbes) ou une grille de contrôle (dans le cas des surfaces) : $P = (p_j)_{j \in J}$ et $P\lambda = \sum_{j \in J} \lambda_j p_j$. En utilisant cette projection, il est alors possible de construire une fonction fractale [7] [6] (ici dans le cas des surfaces) :

$$F(s, t) = P\phi(s, t) = \sum_{j \in J} \phi_j(s, t) p_j$$

où $\phi(s, t)$ est un vecteur de fonctions :

$$\phi(s, t) = (\phi_j(s, t))_{j \in J}$$

Le processus itératif nécessaire à la construction de l'attracteur d'IFS projeté peut être fait directement en appliquant les transformations sur les points de contrôle :

$$\begin{aligned} P\mathcal{A}(\mathcal{I}) &= P \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}^n K \\ &= (\lim_{n \rightarrow \infty} P\mathcal{I}^n) K \end{aligned}$$

$\forall K \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$. La figure 1 illustre la construction d'une courbe et la figure 2 celle d'une surface par ce principe.

3 Méthode d'approximation

Etant donné un ensemble de points (une courbe ou une surface échantillonnée), le but est de déterminer le modèle IFS projeté qui donne la meilleure approximation de cet ensemble. La méthode que nous avons adoptée consiste à transformer le problème d'approximation en un problème de régression non linéaire. Les paramètres de cette régression non linéaire sont les coefficients des matrices de transformation ainsi que les coordonnées du polygone ou de la grille de contrôle. On notera ces paramètres sous la forme d'un vecteur \mathbf{a} . Pour pouvoir formaliser le problème en régression non linéaire, il est nécessaire d'introduire la notion de distance entre la fonction fractale $F_{\mathbf{a}}$ issue du vecteur

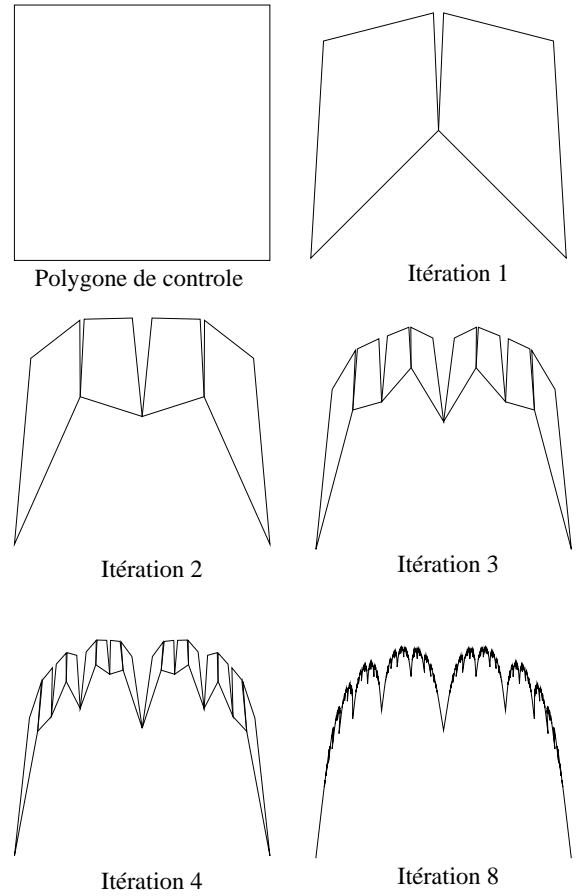


FIG. 1 – Construction d'une courbe

de paramètres \mathbf{a} et les points d'entrée \mathbf{Q} . Nous noterons $d(F_{\mathbf{a}}, \mathbf{Q})$ cette distance. La solution du problème est alors :

$$\mathbf{a}_{\text{opt}}(\mathbf{Q}) = \underset{\mathbf{a}}{\operatorname{argmin}} d(F_{\mathbf{a}}, \mathbf{Q})$$

Deux cas sont distingués ici : le cas des courbes et le cas des surfaces de profondeur. Chacun de ces cas implique un modèle particulier et un calcul de distance approprié. La résolution du problème de régression est fournie par l'algorithme de LEVENBERG-MARQUARDT [5].

Dans le cas des courbes, les points d'entrée constituent une liste ordonnée $\mathbf{Q} = \{Q_i \in \mathbb{R}^2, i = 0 \dots n\}$. La distance entre la courbe fractale $F_{\mathbf{a}}$ et la courbe d'entrée est calculée à l'aide d'une reparamétrisation linéaire des deux courbes puis un rééchantillonnage uniforme des deux fonctions obtenues [3]. Il est alors possible de calculer une distance point à point entre les deux courbes. La distance globale entre les deux courbes pourra être la somme des carrés de ces distances point à point.

Dans le cas des surfaces de profondeur, les points d'entrée constituent une grille d'altitude $\mathbf{Q} = \{Q_{ij} \in \mathbb{R}, i = 0 \dots n, j = 0 \dots n\}$. Ce cas de figure conduit à utiliser un modèle de surface où les points de contrôle sont des

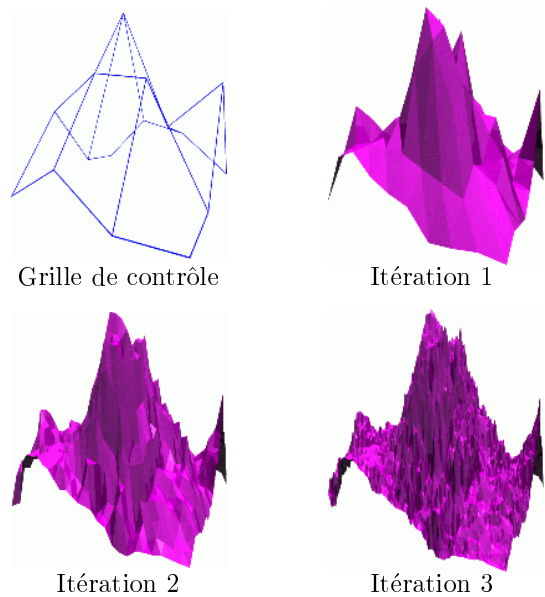


FIG. 2 – Construction d'une surface

scalaires indiquant la hauteur de la surface. La surface est alors définie par :

$$(s,t) \in [0,1]^2 \mapsto F(s,t) = \sum_{j \in J} \phi_j(s,t) z_j \in \mathbb{R}$$

Le calcul de la distance entre la surface fractale $F_{\mathbf{a}}$ et les données d'entrée $\mathbf{Q} = \{Q_{ij} \in \mathbb{R}, i = 0 \dots n, j = 0 \dots n\}$ est équivalent au calcul d'une distance entre deux images (qui seront ajustées à la même taille si besoin est).

Remarque : il est possible de faire des simplifications dans les transformations pour qu'elles n'agissent que localement. Cela signifie que $(T_i)_{kl} \neq 0$ seulement pour quelques valeurs de k et l qui dépendent de la transformation T_i considérée. On ajoute à cela des conditions de raccord qui impliquent l'identification de certaines colonnes dans les transformations :

$$(T_i) e_j = (T_{i'}) e_{j'}$$

La résolution est basée sur l'algorithme de LEVENBERG-MARQUARDT [5]. Cet algorithme combine deux types d'approximation pour la minimisation de la distance. La première est quadratique, la deuxième linéaire. Un mélange de ces deux approximations grâce à un coefficient permet de basculer vers celle qui est la plus appropriée. Ces approximations sont calculées grâce aux dérivées partielles de la fonction qui doivent être fournies. Dans notre cas, celles-ci sont calculées numériquement à l'aide d'une perturbation du vecteur de paramètre \mathbf{a} [2] [3].

4 Résultats et conclusion

La figure 3 montre l'approximation d'une partie de contour d'une feuille de platane. En trait plein est

représenté la courbe initiale, en pointillé la courbe approximée. Le modèle utilisé possède 6 points de contrôle et 3 transformations totalisant 92 paramètres. La courbe initiale est composée de 1250 points. Les figures 4 et 5 montrent l'approximation d'un contour extrait d'une image avec un modèle comprenant 4 points de contrôle et 2 transformations (figure 4) et avec un modèle comprenant 6 points de contrôle et 3 transformations (figure 5). Le contour initial possède 210 points. Dans le premier cas l'approximation est moyenne mais ne nécessite que 29 paramètres, dans le deuxième cas la qualité est bonne et nécessite 60 paramètres. Il s'agit donc d'un compromis pour lequel l'utilisateur doit faire un choix. La figure 6 montre l'effet de la quantification des paramètres sur l'erreur faite sur la courbe.

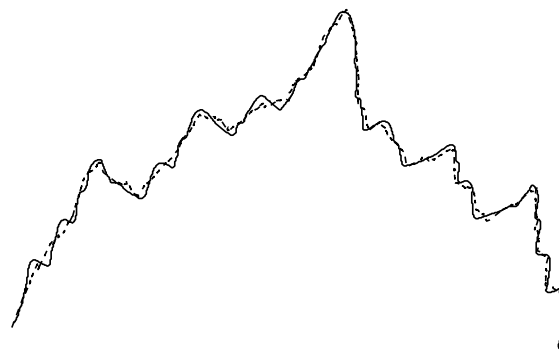


FIG. 3 – Approximation du contour d'une feuille de platane



FIG. 4 – Approximation du contour d'une montagne avec 4 points de contrôle et 2 transformations

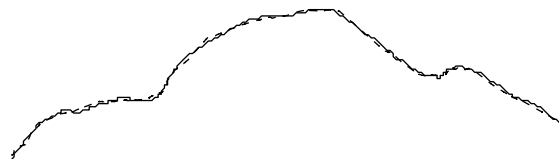


FIG. 5 – Approximation du contour d'une montagne avec 6 points de contrôle et 3 transformations

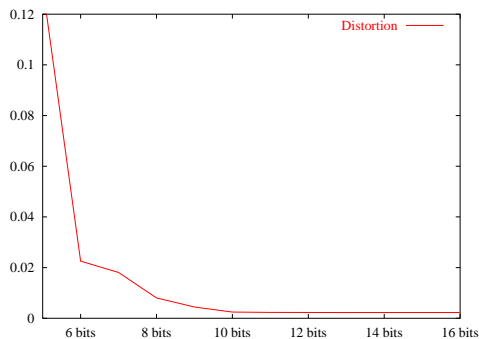


FIG. 6 – Impact de la quantification sur l'erreur d'approximation pour une courbe

La figure 7 montre l'approximation d'une surface lisse (paraboloïde elliptique). Le modèle utilisé est basé sur une grille de contrôle de taille 4×4 et sur 9 transformations simplifiées localement. Le nombre de paramètres induit par ce modèle est de 232. L'aspect lisse de la surface est conservé. La figure 8 montre l'approximation d'une surface topographique. Le modèle utilisé est le même que précédemment.

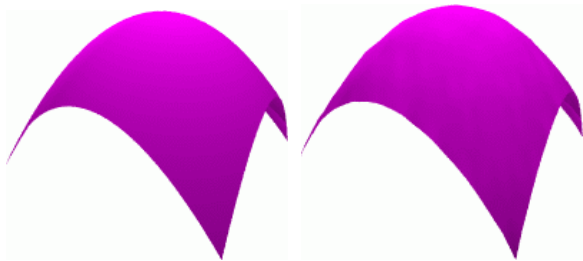


FIG. 7 – Approximation d'une surface lisse

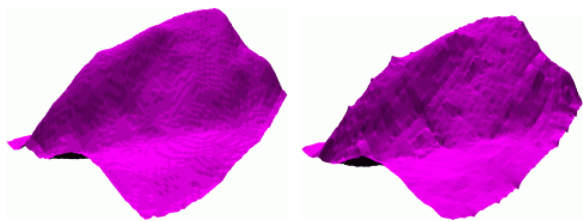


FIG. 8 – Approximation d'une surface topographique

Les figures 9 et 10 montrent l'approximation de deux images en niveaux de gris. La première a été créée à l'aide d'un logiciel de dessin, la deuxième représente une photo d'astronomie : une naine blanche. Le PSNR est de 29.2 dB pour la première et 26.4 dB pour la deuxième. Le facteur de compression est de 29 ce qui correspond à un débit de 0.28 bit/pixel.

L'aspect général des images est conservé. On note la difficulté que le modèle a pour représenter des transitions abruptes i.e. là où il n'y a pas de continuité $C1$. Il ne s'agit ici que des premiers résultats, le modèle

évoluera. Nos travaux en cours concernent l'amélioration de l'approximation des images en plaçant les pôles proches des contours par exemple, en vue de la compression des images naturelles.

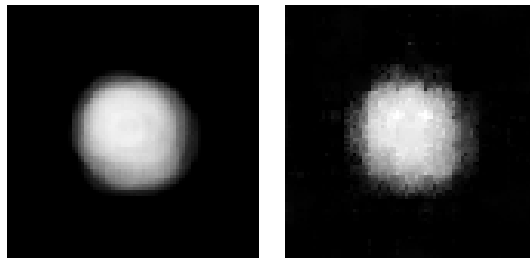


FIG. 9 – Approximation d'une image synthétique

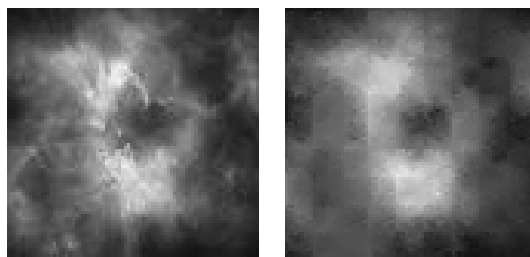


FIG. 10 – Approximation d'une image astronomique

Références

- [1] M Barnsley. *Fractals everywhere*. Academic Press, 1988.
- [2] E Guérin, E Tosan, et A Baskurt. Fractal coding of shapes based on a projected ifs model. In *ICIP 2000*, volume II, pages 203–206, septembre 2000.
- [3] E Guérin, E Tosan, et A Baskurt. A fractal approximation of curves. *Fractals*, 9(1):95–103, mars 2001.
- [4] A E Jacquin. Image coding based on a fractal theory of iterated contractive image transformations. *IEEE Trans. on Image Processing*, 1:18–30, janvier 1992.
- [5] W H Press, B P Flannery, S A Teukolsky, et W T Vetterling. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 1993.
- [6] E Tosan. Surfaces fractales définies par leurs bords. In L Briard, N Szafran, et B Lacolle, editors, *Journées "Courbes, surfaces et algorithmes"*, Grenoble, 15-17 septembre 1999.
- [7] C E Zair et E Tosan. Unified IFS-based Model to Generate Smooth or Fractal Forms. In A Le Méhauté, C Rabut, et L L Schumaker, editors, *Surface Fitting and Multiresolution Methods*, pages 335–344. Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 1997.