
Jean Frédéric Frenet (1816-1900) à Lyon

Géométrie différentielle & calcul infinitésimal pour des élèves d'hier et d'aujourd'hui.

Norbert Verdier*

IUT de Cachan

Département Génie Electrique et Informatique Industrielle

09, avenue de la division Leclerc, 94 234 CACHAN Cedex

&

Groupe d'Histoire et de Diffusion des Sciences d'Orsay

Bâtiment 407

Centre Scientifique d'Orsay

av. G. Clémenceau

91405 ORSAY Cedex

norbert.verdier@u-psud.fr

Sections de rattachement : 71, 72, 25 & 26
Secteur : Secondaire & tertiaire

RESUME *Nous étudions dans cet article les contributions de J.F. Frenet pendant sa période lyonnaise. Cette étude s'inscrit dans un cadre plus général qui a pour objet d'études les journaux mathématiques au XIX^{ème} siècle.*

A partir d'un «point d'entrée» – le cas de Frédéric Frenet – nous étudions dans cet article les stratégies éditoriales développées par un auteur „de province“ au XIX^{ème}. Les mathématiques ne sont pas seulement véhiculées par la presse spécialisée en mathématiques; les Académies savantes comme l'Académie impériale des sciences, belles-lettres et arts de Lyon participent à la diffusion des mathématiques produites par leurs membres.

La seconde partie de l'article est focalisée sur l'étude du manuel d'enseignement produit par Frenet : Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal (1856). Elle jette quelques pistes d'études illustrant des problématiques qui rejoignent nos activités de recherche et d'enseignement d'analyse en IUT : en quoi ce manuel d'enseignement est-il marqueur de la presse mathématique de son temps ? en quoi est-il intéressant d'utiliser ce manuel d'hier pour enseigner aujourd'hui ?

Mots clés :

MOTS-CLÉS : *Frenet/Serret/Liouville/Géométrie/Calcul infinitésimal/Calcul différentiel et intégral/Journal de Mathématiques Pures et Appliquées/ Mémoires de l'Académie impériale des sciences, belles-lettres et arts de Lyon/Gregory*

Pourquoi Frenet? Le choix d'exposer, ici au CNRIUT à Lyon, des travaux autour de certaines des contributions de Frenet s'est présenté de façon assez naturelle. Frenet a officié à la faculté des sciences de la ville pendant une vingtaine d'années avant de prendre sa retraite en 1868. Venir parler d'un auteur dans sa ville peut être heuristique. Cela peut mettre en présence avec des historiens de la ville qui connaissent mieux que quiconque les institutions de la ville et ses réseaux savants. C'est aussi une façon de mettre en exergue certains fonds d'archives difficile d'accès sans un déplacement physique. Cet exposé a pour ambition initiale d'en savoir plus sur cet auteur provincial qui a travaillé à une période où le niveau scientifique des facultés de province est considéré comme faible¹. Comment est-il parvenu à publier ses textes? A-t-il souffert de son éloignement par rapport à Paris? A-t-il tenté de « monter à Paris»? La première partie est guidée par ses questions en se focalisant sur les publications de ses recherches autour de ce que nous appelons aujourd'hui le repère de Serret-Frenet.

La seconde partie répond à une autre problématique. Frenet est l'auteur d'un manuel d'analyse qui a connu un succès éditorial au XIX^e. Son manuel n'est pas un manuel de cours mais un ouvrage de questions qui explorent les différentes sections du calcul différentiel et du calcul intégral. Nous avons utilisé ce manuel à des fins didactiques en testant certaines questions dans nos questionnements d'aujourd'hui. Nous l'avons aussi étudié à des fins historiques en se questionnant sur l'origine de certaines questions posées. Dans quelle mesure ce manuel a-t-il puisé dans la presse mathématique de son temps?

Le repère de Serret-Frenet : un objet géométrique marqueur de la presse de son temps

L'histoire commence à Toulouse en 1847 avec les thèses de Frenet². Sa deuxième thèse s'intitule « Sur quelques propriétés générales des courbes à double courbure ». Cette année là, ce fut la seule thèse soutenue à Toulouse. La précédente avait été soutenue en 1841, la suivante en 1863. L'histoire se poursuit à Paris, où la thèse est publiée en 1852 (Frenet 1852)³ dans le *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, le *Journal de Liouville*. Entre ces deux dates, Frenet a fait du chemin. Il a entre temps été nommé professeur à la Faculté des sciences de Lyon, où désormais nous resterons. C'est le titre qu'il indique en entête de son mémoire.

¹ Dan son ouvrage *Sciences in the provinces, Scientific communities and provincial leadership, 1860-1930* [University of California Press, 1986], Mary Jo Nye a pointé la vitalité des universités de Province dans le dernier tiers du XIX^e (Nancy, Grenoble, Toulouse, Lyon et Bordeaux). De Lyon, elle retient les travaux de chimie appliquée ; elle ne pointe pas les contributions mathématiques de Frenet.

² Né le 7 février 1816 à Périgueux, il a intégré l'École normale en 1840 et a été reçu premier à l'agrégation de mathématiques en 1843 (sur 6 reçus). Pour d'autres éléments biographiques, il faut consulter la rubrique nécrologique publiée le 17 juin 1900 dans *L'avenir de Dordogne*.

³ Cette publication n'est pas mentionnée dans le *Catalogue of scientific papers*.

Dans sa thèse, Frenet introduit ce que nous appelons aujourd'hui, en géométrie différentielle, les formules de Serret-Frenet relatives aux cosinus des angles formés avec les axes coordonnés par la tangente d'une courbe en un point, le rayon de courbure de la courbe et la normale à son plan osculateur. Nous ne discuterons pas ici des aspects mathématiques. Nous renvoyons pour ce type d'étude à la thèse de Jean Delcourt soutenue en décembre 2007 à Paris (Delcourt 2007, 279-290) et également à l'étude de Jean-Marc Ginoux et Bruno Rossetto sur le rôle de la géométrie différentielle dans l'étude des systèmes dynamiques chaotiques (Ginoux et Rossetto, 2006). Nous nous consacrerons ici aux seuls aspects éditoriaux.

Cet apport est dit « de Serret-Frenet » car Joseph-Alfred Serret a déjà publié en 1851, dans le *Journal de Liouville*, ses « quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure » (Serret 1851). L'article de Serret prend la forme d'une note qui a été publiée dans les annexes de la réédition de l'ouvrage de Monge dirigée par Liouville en 1850 (Monge 1850). L'article de Frenet complète (indépendamment sans doute?) le travail de Serret.

En 1853 (Frenet 1853a), étend son travail dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, où il est présenté comme « Professeur au lycée de Lyon ». Il reprend en fait des théorèmes de Bonnet qu'il démontre par des considérations développées dans sa thèse. Il en profite pour indiquer son droit de priorité sur le sujet :

« Ces résultats peuvent s'obtenir un peu plus longuement peut-être, mais d'une manière très - simple aussi, au moyen de formules tirées d'un travail que j'ai remis à M. Liouville en 1847, et qu'il a eu la bonté d'insérer dans le tome XVII du *Journal de Mathématiques*. » (*Ibid.* 365)

Derrière la courtoisie de Frenet, Jesper Lützen – le biographe de Liouville - voit une critique adressée à un Liouville protecteur de « ses cercles parisiens » (Lützen 1990, 740-741). Il est à noter que « le protégé de Liouville » – Serret – signale dans sa lettre qu'il avait remis sa note deux ans avant sa publication effective. Il est raisonnable toutefois de penser que Liouville (comme à son habitude) avait remis à Serret une copie de la thèse de Frenet. En tout cas, Frenet ne publie plus rien dans la presse parisienne (*Journal de Liouville* et *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences*) et se tourne vers les *Mémoires de l'Académie impériale des sciences, belles-lettres et arts de Lyon*. En séance du 18 juillet 1853, il présente son mémoire « Sur la théorie analytique des surfaces ». Il est publié la même année (Frenet 1853b). Le mémoire lyonnais complète la thèse de Serret et donne des applications à de nombreux théorèmes connus de la théorie des surfaces. Il s'agit d'un des rares mémoires publiés dans une académie savante provinciale qui est mentionné dans le *Rapport sur les progrès de la géométrie en France* rédigé par Chasles en 1870 (Chasles 1870, 283). L'insertion du mémoire de Frenet dans les mémoires de l'Académie de Lyon marque d'ailleurs l'entrée des mathématiques dans ce recueil. Les années suivantes Frenet, en tant que professeur à la faculté des sciences de la ville et directeur de l'Observatoire de Lyon, signe plusieurs articles.

Son recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal

En 1856, Frenet publie son *Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal* chez l'éditeur parisien, Mallet-Bachelier (Frenet 1856). Dès sa publication, l'ouvrage fait l'objet d'un compte rendu dans le cahier de décembre 1856 du *Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques*⁴. Le compte-rendu publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* a vraisemblablement été rédigé par Terquem lui-même. Il est indiqué que les exemples sont « puisés aux sources classiques ». Dans sa préface, Frenet précise qu'il a utilisé comme sources : « les œuvres des maîtres, les collections savantes et les journaux scientifiques » (Frenet 1856, v) sans préciser nominale à quelle référence, il renvoyait. En fin de préface, il explique que ses influences sont aussi étrangères :

« Des travaux analogues répandus en Allemagne et en Angleterre ont fourni d'utiles secours. On a surtout largement puisé dans l'excellent ouvrage de M. D-F Gregory publié en 1841, et dont une deuxième édition a paru en 1846. » (*Ibid.*)

Il serait intéressant de se livrer à une comparaison avec le manuel de Gregory⁵. Nous allons ici seulement nous focaliser sur les emprunts faits par Frenet au *Journal de Liouville*. Cette démarche s'inscrit dans une démarche beaucoup plus générale qui consiste à étudier la diffusion de ce *Journal* via les manuels tout au long du XIX^e siècle.

Le *Recueil* de Frenet est destiné « aux élèves de l'École polytechnique, à ceux de l'École Normale » - cible classique des ouvrages de mathématiques dans la première partie du XIX^e siècle et « aux auditeurs des cours de Mathématiques dans les Facultés des Sciences ». Il est composée de trois parties. La première partie commence par l'exposition de 191 questions de calcul différentiel classées selon 14 items (Frenet 1856, 1-16) (différentiation des fonctions d'une variable, de plusieurs variables, dérivée d'ordre quelconque, etc.) et empruntées pour certaines à certains auteurs⁶. La seconde partie est consacrée au calcul intégral. Elle est composée de 265 exercices classés selon 19 catégories (intégration par substitution, par parties, par les fractions rationnelles, etc.)

⁴ Ce *Bulletin* a été lancé en 1855 par Terquem, le co-fondateur des *Nouvelles Annales de Mathématiques* en 1842. Ce *Bulletin* prend la forme d'un cahier mensuel annexé au cahier mensuel des *Nouvelles Annales* ; il constitue le premier journal consacré à l'histoire des mathématiques. Les références du compte rendu sont : [*Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques*, II (1856), 197-198].

⁵ Duncan Farquharson Gregory - né en 1813 et originaire de Edinburgh – poursuit ses études à l'Université de Cambridge. En 1837, avec Robert Leslie Ellis, il fonde *The Cambridge Mathematical Journal*. Il décède en 1844. La seconde édition de son traité est donc posthume.

⁶ La question 155 est attribuée à Fourier ; elle est extraite de son *Traité de la chaleur*. La question 99 est attribuée à Viviani, la 120 à Euler et la 132 à Maria Agnesi. Frenet ne précise pas les références.

(Frenet 1856, 81-102) et empruntés éventuellement à certains auteurs⁷. La troisième partie est composée de 42 « questions diverses »⁸ (Frenet 1856, 185-191). L'ouvrage est donc composée de presque 500 questions (498 exactement) posées et résolues sur 220 pages ; il se termine par deux planches de 27 figures renvoyant à certains exercices pour lesquels une figure rend l'énoncé plus compréhensible.

Dans le manuel de Frenet, nous avons repéré les références faites au *Journal de Liouville*⁹. Elles sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

| Pages Dans (Frenet 1856) | Références au <i>Journal de Liouville</i> | Contenu ¹⁰ |
|-----------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 50 | « M. Liouville en a donné, dans le tome VII [1842] de son journal, une solution géométrique très simple. » | Q 120 [Calcul différentiel] |
| 50-52 | (Bertrand 1843) | Q 123 [Calcul différentiel] |
| 122 | (Lejeune-Dirichlet 1839) | Q 302 [Calcul intégral] |
| 166 | (Binet 1837) | Q 428 [Calcul intégral] |
| 173-175 | (Bonnet 1844) & (Serret 1842) | Q 447 [Calcul intégral] & Q 448 [Calcul intégral] |
| 200 | (JMPA 1849) ¹¹ | Q12 [Questions diverses] |

Nous remarquons que les emprunts faits au *Journal de Liouville* remontent essentiellement à la première décennie du *Journal*, à une période où, sans doute, le *Journal* est le plus, comme l'indique son sous-titre, un « recueil sur les diverses parties des mathématiques ». Il est à souligner que les références ne sont pas précisées. Frenet se contente d'indiquer l'auteur et l'année de parution dans le *Journal*. Cela a nécessité d'aller vérifier les sources dans le *Journal*, article par article.

Au cours des dernières années, nous avons testé avec des étudiants d'IUT (IUT Cachan, Geii1), par différents biais, environ une centaine des exercices posés par Frenet. Certains ont été traités classiquement au cours de TD, une des questions de

⁷ Voici la liste des exercices extraites des travaux d'auteurs : Abel (346), Euler (337, 339, 342, 343 & 351), Laplace (347, 348 & 352), Legendre (349 & 350) & Poisson (341 & 354).

⁸ Certaines questions sont attribuées : La question 4 est attribuée à Liouville, la question 11 à Sturm, les questions 12 et 13 à Jacobi et la question 17 à Euler.

⁹ Certaines questions renvoient à d'autres journaux : les questions 120 et 121 renvoient à un article de Bérard, dans les *Annales de Gergonne* [Tome IV, 1813-1814]. Frenet ne précise pas la référence exacte. La question 328 renvoie à un article de Jacobi dans le *Journal de Crelle* ; il s'agit du théorème consistant à effectuer un changement de variable dans une intégrale double grâce à ce que nous appelons aujourd'hui le « Jacobien ».

¹⁰ Nous avons joint en annexe l'intitulé des questions. Nous nous sommes contentés d'indiquer dans cette colonne le numéro de la question et dans quelle partie de l'ouvrage elle était située : relevait-elle du calcul différentiel ? du calcul intégral ou des questions diverses ?

¹¹ L'auteur n'est pas cité. En fait, il s'agit d'un article de Liouville (Liouville 1849).

Frenet, celle découlant de la résolution analytique du problème consistant à trouver dans un triangle un point dont la somme des distances de ce point aux trois sommets soit minimale, a été traité par un groupe d'étudiants dans le cadre d'un « projet sciences »¹².

En quoi est-il intéressant d'utiliser ce manuel d'hier pour enseigner aujourd'hui ? Le premier intérêt est de varier nos sources d'enseignement. Le second, et sans doute le plus important, est de proposer à des étudiants des textes qui sont sans doute « moins denses » que ceux d'aujourd'hui. Aborder systématiquement un texte mathématique avec la rigueur d'aujourd'hui avec des étudiants qui ne feront pas d'études mathématiques peut être un frein pour la quasi - majorité des étudiants. On peut par exemple introduire la notion de changement de variable dans une intégrale après avoir défini la notion primordiale de « C^1 -difféomorphisme » ; on peut, plus simplement, avec Frenet dire « Étant données les relations $x + y = u$, $y = uv$, dire ce que devient l'intégrale [...] en une autre où les variables soient u et v . ». Cette exploration systématique des corpus mathématiques du XIX^e à des fins pédagogiques est une des constantes de nos enseignements à différents niveaux. Nous avons déjà publié avec Christian Gérini une étude visant à l'exploitation des journaux mathématiques du XIX^e siècle dans nos classes (Gérini et Verdier, 2007) et nous préparons un article pour cette même revue *Repères* qui s'intitulera : « Se repérer dans le temps et dans l'espace grâce à Jean - Frédéric Frenet (1816-1900) ». Cet article sera d'une certaine façon l'extension pédagogique de notre première partie. L'historien des mathématiques ne doit pas, il nous semble, se priver de la possibilité de « tester en classe » aujourd'hui des énoncés d'hier, s'il en a la possibilité. Il ne fait pas stricto - sensu de l'histoire mais l'histoire ne se nourrit-elle pas de ce va - et - vient permanent organisé entre le passé et le présent ?

Notre histoire, commencée à Lyon au début des années cinquante, se termine à Lyon en 1868. Frenet démissionne, pour des raisons de maladie, de l'Académie des sciences de Lyon. Il retourne à Périgueux¹³, dans sa ville natale. Une deuxième édition, revue et augmentée, de son cours venait d'être publiée en 1866.

Annexe A : Intitulé des questions extraites du *Journal de Liouville*

¹² Un « projet science » désigne à l'IUT de Cachan un projet effectué en autonomie par un binôme (c'est un peu l'équivalent des TPE au lycée). Chaque binôme doit traiter un sujet relevant des sciences. Certains sujets sont choisis, d'autres sont « suggérés ». Ainsi, nous orientons les étudiants désireux de poursuivre leurs études vers des écoles d'ingénieurs sélectives (Supelec, INSA, ENSI, etc.) vers des sujets traditionnellement plus difficile. Le sujet sur la question issue du manuel de Frenet relevait de cette catégorie là. L'an dernier, au colloque Geii de Marseille, nous avons dressé un bilan sur 10 ans de projet sciences à l'IUT de Cachan. Cf. Norbert Verdier, « Les projets sciences à l'IUT de Cachan (Geii1) », Colloque Geii, Marseille, 30 mai-1^{er} juin 2007.

¹³ Frenet était en relations avec une autre personnalité de Périgueux, le pamphlétaire Léon Bloy . Nous avons pris des contacts avec la Société des Études Bloyennes pour étudier les correspondances des deux hommes.

Q 120 [Calcul différentiel]

« Circonscire à un triangle donné la plus petite ellipse possible (Euler) » (Frenet 1856, 11)

Q 123 [Calcul différentiel]

« Trouver un point tel que la somme de ses distances à trois points donnés soit la plus petite possible. » (Frenet 1856, 11).

Q 302 [Calcul intégral]

« Développée de l'ellipse » (Frenet 1856, 89)

Q 428 [Calcul intégral]

$$\ll d^2x/dt^2 = dR/dx ;$$

$$d^2y/dt^2 = dR/dy,$$

$d^2z/dt^2 = dR/dz$; x, y, z sont des fonctions de t , et R est une fonction de

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}. \text{ (Binet) (Frenet 1856, 99).}$$

Q 447 [Calcul intégral]

« Trouver la courbe qui rend maximum ou minimum l'expression¹⁴ » (Frenet 1856, 101)

Q 448 [Calcul intégral]

« Trouver la courbe qui rend maximum ou minimum l'expression¹⁵ » (Frenet 1856, 101)

Q12 [Questions diverses]

« Si l'on connaît une intégrale première de l'équation $d^2y/dx^2 = F(y, x)$, on peut toujours obtenir son intégrale générale au moyen des quadratures. (Jacobi) » (Frenet 1856, 187).

Bibliographie

Bertrand, Joseph

1843. « Remarques sur la théorie des maxima et minima de fonctions à plusieurs variables », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, I, **8** (1843), 155-160.

Binet, Jacques

1837. « Note sur l'intégration d'un système d'équations différentielles du second ordre, entre un nombre quelconque de variables, analogues à celles du mouvement d'un point libre autour d'un centre fixe, sollicité par une force fonction de la distance au centre », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, I, **2** (1837), 457-468.

Bonnet, Ossian

1844. Propriétés géométriques et mécaniques de quelques courbes remarquables, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, I, **9** (1844), 97-112.

Chasles, Michel

1870. *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Imprimerie nationale, 1870.

$$^{14} \int_{x_0}^{x_1} \rho^n ds$$

$$^{15} \int_{x_0}^{x_1} (x^2 + y^2)^{n/2} \left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{1/2} ds$$

Delcourt, Jean

2007. *Analyse et géométrie : les courbes gauches de Clairaut à Serret et Frenet*, thèse soutenue le 19 décembre 2007, Université Paris VI, 2007.

Frenet, Jean, Frédéric

1852. « Sur les courbes à double courbure », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, I, **17** (1852), 437-447.

1853a. « Théorèmes sur les courbes gauches », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, XII (1853), 365-372.

1853b. « Sur la théorie analytique des surfaces », *Mémoires de l'Académie impériale des sciences, belles-lettres et arts de Lyon*, III (1853), 5-19.

1856. *Recueil d'exercices sur le calcul infinitésimal*, Mallet-Bachelier, 1856.

Gérini, Christian & Verdier, Norbert

2007. « Les *Annales de Gergonne* (1810-1832) et le *Journal de Liouville* (1836-1874) : une mine de textes numérisés à exploiter dans notre enseignement. », *Repères*, **67** (2007), 55-68, Topiques éditions, 2007.

Ginoux, Jean-Marc & Rossetto, Bruno

2006. « Du rôle de la Géométrie Différentielle dans l'étude des systèmes dynamiques chaotiques », Actes du 12^{ème} Colloque National de la Recherche en IUT, Brest, 1-2 juin 2006.

Gregory, Duncan, Farquharson

1841. *Examples of the processes of the differential and integral calculus*, Cambridge, Deighton, 1841. (Seconde édition 1846).

Lejeune-Dirichlet, Peter, Gustav

1839. « Sur une nouvelle méthode pour la détermination des intégrales multiples », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, I, **4** (1839), 164-168.

Liouville, Joseph

1849. « Remarques sur une classe d'équations différentielles, à l'occasion d'un Mémoire de M. JACOBI sur quelques séries elliptiques », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, I, **14** (1849), 225-241.

Lützen, Jesper

1990. *Joseph Liouville (1809-1882), a master of pure and applied mathematics*, Ed. Springer-Verlag, 1990.

Monge, Gaspard

1850. *Applications de l'analyse à la géométrie*, sous les auspices de Liouville, cinquième édition revue et corrigée, Mallet - Bachelier, 1850.

Serret, Joseph, Alfred

1842. « Note sur les intégrales eulériennes de seconde espèce », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, I, **7** (1842), 114-119.

